এস এস সি গণিত (আবশ্যিক)

অধ্যায়-১৫: ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত উপপাদ্য ও সম্পাদ্য

প্রশ্ন ▶ ১ ΔPQR এ $\angle PQR = 1$ সমকোণ এবং $PQ = QR$, Q থেকে PR এর উপর QM লম্ব PR কে M বিন্দুতে ছেদ করে। N, PQ এর মধ্যবিন্দু।

[আইডিয়াল স্কুল এন্ড কলেজ, মতিঝিল, ঢাকা]

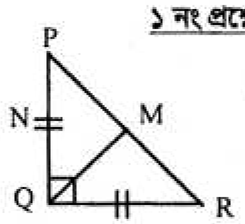
ক. উপরের তথ্যানুসারে চিত্র আঁক।

খ. প্রমাণ কর যে, $PR = \sqrt{2}PQ$.

গ. প্রমাণ কর যে, $MN = \frac{1}{2}QR$.

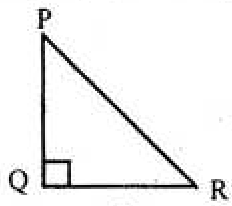
১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



ΔPQR এ $\angle PQR = 1$ সমকোন। $QM \perp PR$ এবং N, PQ বাহুর মধ্যবিন্দু।

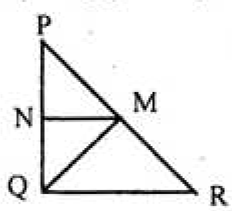
খ ΔPQR এ $\angle PQR = 1$ সমকোণ এবং $PQ = QR$। প্রমাণ করতে হবে যে, $PR = \sqrt{2}\,PQ$



প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
এখানে, ΔPQR এ $\angle PQR = 1$ সমকোণ	
$\therefore$ পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,	
$PR^2 = PQ^2 + QR^2$	
বা, $PR^2 = PQ^2 + PQ^2$	[$\because PQ = QR$]
বা, $PR^2 = 2PQ^2$	
$\therefore PR = \sqrt{2}\,PQ$ (প্রমাণিত)	[$\because$ বর্গমূল করে]

গ



ΔPQR এ $\angle PQR = 1$ সমকোণ ও $PQ = QR$। Q হতে PR এর উপর QM লম্ব যা PR কে M বিন্দুতে ছেদ করে। আবার N, PQ এর মধ্যবিন্দু। M, N যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $MN = \frac{1}{2}QR$।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
ΔPQM ও ΔQMR এ	
$PQ = QR$	[দেওয়া আছে]
$QM = QM$	[সাধারণ বাহু]
$\angle QMP = \angle QMR = 1$ সমকোণ	[$\because QM \perp PR$]
$\therefore \Delta PQM \cong \Delta QMR$	
$\therefore PM = RM$	
অর্থাৎ M, PR এর মধ্যবিন্দু।	
আবার, N, PQ এর মধ্যবিন্দু।	
আমরা জানি, ত্রিভুজের যেকোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশের দৈর্ঘ্য তৃতীয় বাহুর অর্ধেক।	
এখন, ΔPQR-এ	
PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে N ও M	
$\therefore MN = \frac{1}{2}QR$ (প্রমাণিত)	

প্রশ্ন ▶ ২ ABC ও DBC ত্রিভুজ ক্ষেত্রদ্বয় একই ভূমি BC এর উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগল BC ও AD এর মধ্যে অবস্থিত।

[ভিকারুননিসা নূন স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]

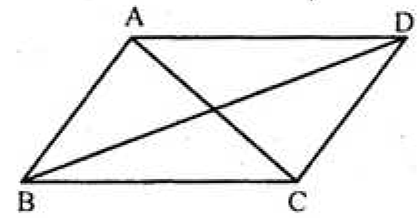
ক. তথ্যানুসারে চিত্র অঙ্কন কর।

খ. প্রমাণ কর যে, ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \Delta DBC$ এর ক্ষেত্রফল।

গ. যদি ABC সমবাহু ত্রিভুজ হয় এবং $AD \perp BC$ হয়, প্রমাণ কর যে, $4AD^2 = 3AB^2$.

২ নং প্রশ্নের সমাধান

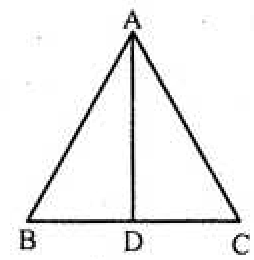
ক



চিত্রে ABC ও DBC ত্রিভুজ ক্ষেত্রদ্বয় একই ভূমি BC এর উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগল BC ও AD এর মধ্যে অবস্থিত।

খ মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১৫ এর উপপাদ্য-১ দ্রষ্টব্য।

গ



দেওয়া আছে, ΔABC-সমবাহু

অর্থাৎ $AB = BC = CA$

এবং AD, BC এর ওপর লম্ব।

প্রমাণ করতে হবে যে, $4AD^2 = 3AB^2$

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
(১) $AD \perp BC$	[দেওয়া আছে]
$\therefore \angle ADB = \angle ADC = 90°$.	
(২) এখন, সমকোণী ΔABD এবং সমকোণী ΔACD-এ	
অতিভুজ AB = অতিভুজ AC	[$\because$ ABC সমবাহু ত্রিভুজ]
এবং $AD = AD$	[$\because$ সাধারণ বাহু]
$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$	[$\because$ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অতিভুজ এবং অপর একটি বাহু সমান]
সুতরাং, $BD = CD$	
$\therefore BC = 2BD$	
(৩) আবার, সমকোণী ΔABD-এ $\angle ADB = 90°$	
এবং অতিভুজ = AB.	
(৪) পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,	
$AB^2 = AD^2 + BD^2$	
বা, $AD^2 = AB^2 - BD^2$	
বা, $4AD^2 = 4AB^2 - 4BD^2$	[উভয়পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে]
বা, $4AD^2 = 4AB^2 - (2BD)^2$	
বা, $4AD^2 = 4AB^2 - BC^2$	[$\because BC = 2BD$]
বা, $4AD^2 = 4AB^2 - AB^2$	[$\because AB = BC$]
$\therefore 4AD^2 = 3AB^2$. (প্রমাণিত)	

প্রশ্ন ▶ ৩ PQR সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ QR-এর উপর M যে কোনো বিন্দু। D, PQ এর উপর একটি বিন্দু। *[মতিঝিল সরকারি বালক উচ্চ বিদ্যালয়, ঢাকা]*

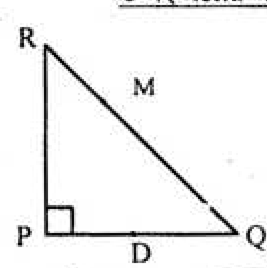
ক. তথ্যগুলো চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. দেখাও যে, $RQ^2 + PD^2 = PQ^2 + RD^2$

গ. প্রমাণ কর যে, $MR^2 + MQ^2 = 2PM^2$

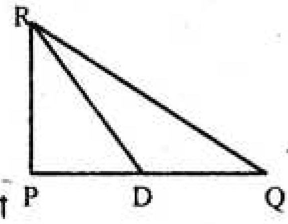
৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



চিত্রে ΔPQR সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle P = 90°$ ও $PQ = PR$ এবং M, অতিভুজ QR উপর যেকোন একটি বিন্দু।

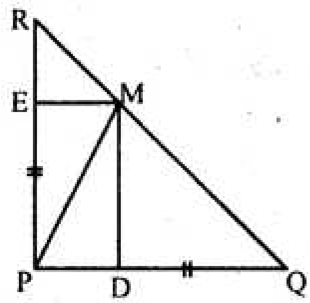
খ দেওয়া আছে, সমকোণী ΔPQR এ অতিভুজ QR। D, PQ এর উপর একটি বিন্দু। R, D যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $RQ^2 + RD^2 = PQ^2 + RD^2$



প্রমাণ:

ধাপ:	যথার্থতা
(১) ΔPQR সমকোণী।	
$\therefore RQ^2 = PR^2 + PQ^2$ ....(i)	[পীথাগোরাসের সূত্রানুসারে]
(২) আবার, ΔRPD এর জন্য $\angle P$ সমকোণ।	
$\therefore RD^2 = PR^2 + PD^2$	[একই কারণে]
বা, $PD^2 = RD^2 - PR^2$ ....(ii)	
(৩) (i) ও (ii) যোগ করে পাই,	
$RQ^2 + PD^2 = PR^2 + PQ^2 + RD^2 - PR^2$	
$\therefore RQ^2 + PD^2 = PQ^2 + RD^2$ **(প্রমাণিত)**	

গ **বিশেষ নির্বচন:** মনে করি, সমদ্বিবাহু সমকোণী ΔPRQ-এর PR = PQ এবং অতিভুজ RQ। M, RQ এর ওপর যেকোনো বিন্দু। M, P যোগ করি।
প্রমাণ করতে হবে যে,
$MR^2 + MQ^2 = 2PM^2$.



অঙ্কন: M বিন্দু থেকে PR এবং PQ বাহুর ওপর যথাক্রমে ME এবং MD লম্ব টানি।

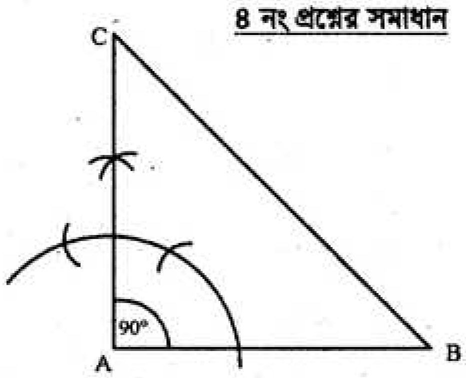
প্রমাণ : ধাপ	**যথার্থতা**
(১) ΔPRQ-এর, $\angle P = 90°$	
এবং $\angle R = \angle Q = 45°$	[$\because$ PQ = PR]
এখন, ΔMDQ-এর, $\angle D = 90°$	[$\because MD \perp PQ$]
সুতরাং $\angle DMQ = \angle DQM = 45°$	
$\therefore$ QD = MD	
অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়, MRE সমকোণী ত্রিভুজে, ME = RE	
(২) MDQ সমকোণী ত্রিভুজে MQ অতিভুজ হওয়ায়	[পিথাগোরাসের উপপাদ্য]
$MQ^2 = MD^2 + QD^2$	
$= MD^2 + MD^2$	[$\because$ MD = QD]
$\therefore MQ^2 = 2MD^2$ ... ... (i)	
(৩) MRE সমকোণী ত্রিভুজে MR অতিভুজ হওয়ায়,	
$MR^2 = RE^2 + ME^2$	
$= ME^2 + ME^2$	[$\because$ RE = ME]
$\therefore MR^2 = 2ME^2$ ... ... (ii)	
(৪) (i) এবং (ii) নং যোগ করে পাই,	
$MQ^2 + MR^2 = 2MD^2 + 2ME^2 = 2(MD^2 + ME^2)$	
আবার, PDME একটি আয়ত।	[$\angle E = \angle P = \angle D$ = এক সমকোণ]
$\therefore$ ME = PD	[$\because$ আয়তক্ষেত্রের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান]
$\therefore MQ^2 + MR^2 = 2(MD^2 + PD^2)$ ... ... (iii)	
(৫) PDM সমকোণী ত্রিভুজে MP অতিভুজ হওয়ায়,	
$MP^2 = MD^2 + PD^2$	[পিথাগোরাসের উপপাদ্য]
(৬) (iii) নং হতে পাই,	
$MQ^2 + MR^2 = 2MP^2$	
$\therefore MR^2 + MQ^2 = 2MP^2$ **(প্রমাণিত)**	

প্রশ্ন ▶ ৪ ΔABC এর $\angle A = 90°$ এবং BC এর অতিভুজ।
[শহীদ পুলিশ স্মৃতি কলেজ, ঢাকা]

ক. তথ্য অনুযায়ী চিত্র আঁক। ২
খ. প্রমাণ কর যে, $BC^2 = AB^2 + AC^2$. ৪
গ. D, BC এর মধ্যবিন্দু হলে, দেখাও যে, AB + AC > 2AD. ৪

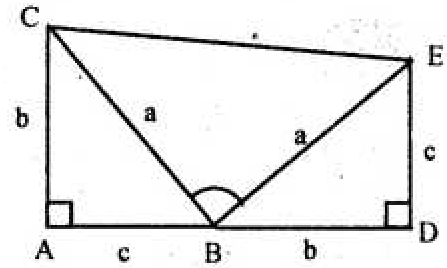
৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



প্রদত্ত উপাত্ত অনুযায়ী ΔABC আঁকা হলো।

খ **বিশেষ নির্বাচন:** মনে করি, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজের $\angle A$ = এক সমকোণ, BC = a, AB = c ও AC = b.
প্রমাণ করতে হবে,
$BC^2 = AC^2 + AB^2$
অর্থাৎ, $a^2 = b^2 + c^2$



অঙ্কন : AB বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন BD = AC = b হয়। D বিন্দুতে AD রেখাংশের ওপর লম্বভাবে DE রেখাংশ আঁকি যেন DE = AB = c হয়। C, E ও B, E যোগ করি।

প্রমাণ : **ধাপ** **যথার্থতা**

এখন, ΔABC ও ΔDEB এ

(১) AB = DE = c, AC = DB = b [অঙ্কন অনুসারে]
এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle BAC$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle EDB$ [প্রত্যেকে এক সমকোণ]
$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEB$
$\therefore$ BC = EB = a এবং $\angle BCA = \angle EBD$

(২) এখন যেহেতু $CA \perp AD$ এবং $ED \perp AD$, সুতরাং $CA \parallel ED$.
অতএব, CADE একটি ট্রাপিজিয়াম।
আবার, $\angle ABC + \angle BCA$ = এক সমকোণ।
$\therefore \angle ABC + \angle EBD$ = এক সমকোণ।
কিন্তু $\angle ABC + \angle CBE + \angle EBD$ = দুই সমকোণ।
$\therefore \angle CBE$ = এক সমকোণ,

(৩) কিন্তু, CADE ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = Δ ক্ষেত্র CAB এর ক্ষেত্রফল + Δ ক্ষেত্র CBE এর ক্ষেত্রফল + Δ ক্ষেত্র EBD এর ক্ষেত্রফল।

$\therefore \frac{1}{2}AD(AC + DE) = \frac{1}{2} \times AC \times AB + \frac{1}{2} \times BC \times BE + \frac{1}{2} \times BD \times DE$

বা, $\frac{1}{2}(AB + BD)(AC + DE) = \frac{1}{2} \times AC \times AB + \frac{1}{2} \times BC \times BE + \frac{1}{2} \times BD \times DE$ [$\because$ AD = AB + BD]

বা, $\frac{1}{2}(c + b)(b + c) = \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}bc$

বা, $\frac{1}{2}(b + c)^2 = bc + \frac{1}{2}a^2$

বা, $\frac{1}{2}(b^2 + 2bc + c^2) = bc + \frac{1}{2}a^2$

বা, $\frac{1}{2}b^2 + bc + \frac{1}{2}c^2 = bc + \frac{1}{2}a^2$

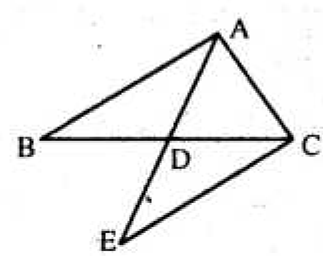
বা, $\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}a^2$

বা, $b^2 + c^2 = a^2$

$\therefore a^2 = b^2 + c^2$

$\therefore BC^2 = AB^2 + AC^2$ **(প্রমাণিত)**

গ **বিশেষ নির্বচন:** দেওয়া আছে, ΔABC-এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D. A, D যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, AB + AC > 2AD.



অঙ্কন: AD কে E পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করি যেন, DE = AD হয়। E, C যোগ করি।

প্রমাণ: ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔABD এবং ΔECD-এ	
BD = CD	[$\because$ D, BC এর মধ্যবিন্দু দেওয়া আছে]
AD = DE	[অঙ্কন অনুসারে]
এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ADB$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle EDC$	[বিপ্রতীপ কোণ সমান]
$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ECD$	[$\because$ দুইটি বাহু এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ সমান]
সুতরাং AB = CE ... ... (i)	
(২) এখন, Δ AEC-এ,	
AC + CE > AE	[$\because$ ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর]
বা, AC + AB > AD + DE	[$\because$ (i) নং থেকে AB = CE]
বা, AB + AC > AD + AD	[$\because$ অঙ্কনানুসারে, DE = AD]
$\therefore$ AB + AC > 2AD. **(প্রমাণিত)**	

প্রশ্ন ▶ ৫ ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle A$ = এক সমকোণ। D, BC এর মধ্যবিন্দু। *[মতিঝিল মডেল হাই স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]*

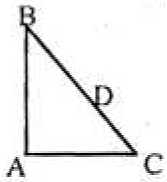
ক. সংক্ষিপ্ত বর্ণনাসহ চিত্রটি অঙ্কন কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

গ. প্রমাণ কর যে, $AD = \frac{1}{2}BC$.

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

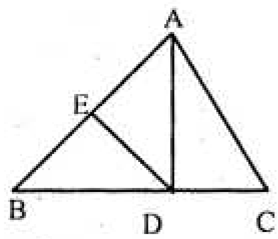
ক



ABC সমকোণী ত্রিভুজে
$\angle A = 90°$, D, BC এর মধ্যবিন্দু।

খ ৪(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ মনে করি, ΔABC-এর $\angle A$ = এক সমকোণ এবং D, BC এর মধ্যবিন্দু।
প্রমাণ করতে হবে যে, $AD = \frac{1}{2}BC$.



অঙ্কন: A, D যোগ করি। AB এর মধ্যবিন্দু E নিই। D, E যোগ করি।

প্রমাণ: ধাপ যথার্থতা

(১) ΔABC-এ E এবং D যথাক্রমে AB ও BC এর মধ্যবিন্দু।
$\therefore DE \parallel AC$ [$\because$ ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল।]
$\therefore \angle BAC$ = অনুরূপ $\angle BED$ = এক সমকোণ।

(২) এখন, ΔAED ও ΔBED-এ
$AE = BE$ [$\because$ E, AB এর মধ্যবিন্দু]
এবং $\angle AED$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle BED$ [$\because$ প্রত্যেকে সমকোণ]
এবং DE সাধারণ বাহু।
$\therefore \Delta AED \cong \Delta BED$
$\therefore AD = BD$

(৩) কিন্তু, $BD = \frac{1}{2}BC$
$\therefore AD = \frac{1}{2}BC$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ▶ ৬ ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ACB$ সমকোণ এবং AB অতিভুজ। *[হলিক্রস উচ্চ বালিকা বিদ্যালয়, ঢাকা]*

ক. পীথাগোরাসের উপপাদ্যটি লিখ।

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

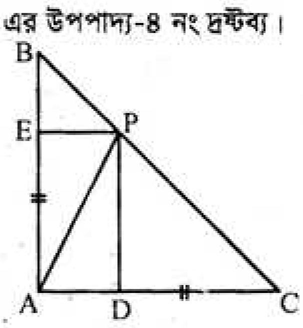
গ. ABC একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। BC এর অতিভুজ এবং P, BC এর উপর যেকোন বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$.

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১৫ এর উপপাদ্য-৪ নং দ্রষ্টব্য।

খ মাধ্যমিক গণিত পাঠ্য বইয়ের অনুশীলনী-১৫ এর উপপাদ্য-৪ নং দ্রষ্টব্য।

গ **বিশেষ নির্বচন:** মনে করি, সমদ্বিবাহু সমকোণী ΔABC-এর AB = AC এবং অতিভুজ BC। P, BC এর ওপর যেকোনো বিন্দু। P, A যোগ করি।
প্রমাণ করতে হবে যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$.



অঙ্কন: P বিন্দু থেকে AB এবং AC বাহুর ওপর যথাক্রমে PE এবং PD লম্ব টানি।

প্রমাণ: ধাপ যথার্থতা

(১) ΔABC-এর, $\angle A = 90°$
এবং $\angle B = \angle C = 45°$ [$\because AC = AB$]
এখন, ΔPDC-এর, $\angle D = 90°$ [$\because PD \perp AC$]
সুতরাং, $\angle DPC = \angle DCP = 45°$
$\therefore CD = PD$
অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়, PBE সমকোণী ত্রিভুজে, PE = BE

(২) PDC সমকোণী ত্রিভুজে PC অতিভুজ হওয়ায় [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]
$PC^2 = PD^2 + CD^2$
$= PD^2 + PD^2$ [$\because PD = CD$]
$\therefore PC^2 = 2PD^2$ ... ... (i)

(৩) PBE সমকোণী ত্রিভুজে PB অতিভুজ হওয়ায়,
$PB^2 = BE^2 + PE^2$
$= PE^2 + PE^2$ [$\because BE = PE$]
$\therefore PB^2 = 2PE^2$ ... ... (ii)

(৪) (i) এবং (ii) নং যোগ করে পাই,
$PC^2 + PB^2 = 2PD^2 + 2PE^2 = 2(PD^2 + PE^2)$
আবার, ADPE একটি আয়ত। [$\angle E = \angle A = \angle D$ = এক সমকোণ]
$\therefore PE = AD$ [$\because$ আয়তক্ষেত্রের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান]
$\therefore PC^2 + PB^2 = 2(PD^2 + AD^2)$ ... ... (iii)

(৫) ADP সমকোণী ত্রিভুজে PA অতিভুজ হওয়ায়,
$PA^2 = PD^2 + AD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

(৬) (iii) নং হতে পাই,
$PC^2 + PB^2 = 2PA^2$
$\therefore PB^2 + PC^2 = 2PA^2$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ▶ ৭ ABC একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ এবং BC এর অতিভুজ। *[আইডিয়াল কলেজ, ঢাকা]*

ক. পীথাগোরাসের উপপাদ্যটি লিখ।

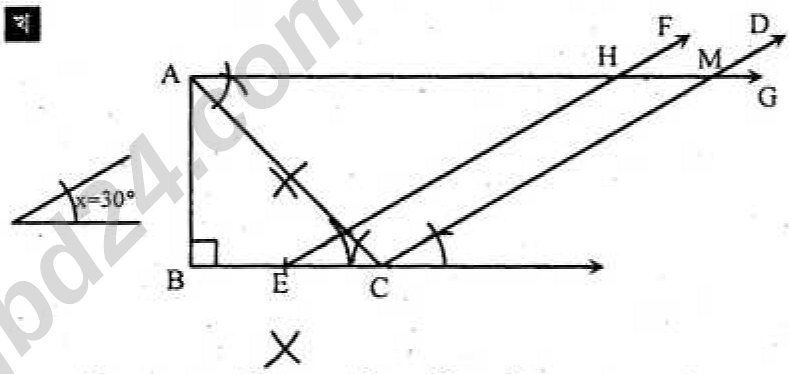
খ. এমন একটি সামান্তরিক আঁক যার একটি কোণ 30° এবং যার সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফল ABC ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান। (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক)

গ. BC এর উপর যে কোন বিন্দু P হলে প্রমাণ কর যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১৫ পীথাগোরাসের উপপাদ্য দ্রষ্টব্য।

খ



মনে করি, ABC একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার $\angle ABC$ = এক সমকোণ, AB = BC এবং $\angle x = 30°$। এরূপ একটি সামান্তরিক আঁকতে হবে যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফল ΔABC-এর ক্ষেত্রফলের সমান হয়।

অঙ্কনের বিবরণ: (১) BC বাহুকে E বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করি।
(২) EC রেখার E বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান করে $\angle CEF$ আঁকি।
(৩) A বিন্দু দিয়ে BC বাহুর সমান্তরাল AG রশ্মি টানি। মনে করি তা EF কে H বিন্দুতে ছেদ করে।
(৪) C বিন্দু দিয়ে $EF \parallel CD$ আঁকি। মনে করি CD রেখা AG-কে M বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ECMH-ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

গ ৬(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৮ ABC একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। BC এর অতিভুজ এবং P, BC এর ওপর যেকোনো বিন্দু। *[বনানী বিদ্যানিকেতন স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]*

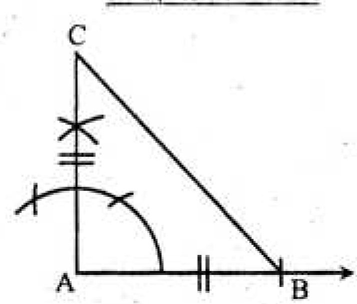
ক. তথ্যানুসারে চিত্রটি আঁক।

খ. প্রমাণ কর যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$

গ. ত্রিভুজটির সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি সামান্তরিক আঁক যার একটি কোণ 60° (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক)

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



চিত্রে ΔABC এ $\angle A$ সমকোণ, BC অতিভুজ এবং AB = AC.

খ ৬(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ ৭(খ) নং সমাধানের অনুরূপ।

প্রশ্ন ▶৯ PQR ত্রিভুজের $\angle P$ এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক QR বাহুকে M বিন্দুতে ছেদ করে। */সফিউদ্দিন সরকার একাডেমী এন্ড কলেজ, গাজীপুর/*

ক. সদৃশকোণী ত্রিভুজ বলতে কী বুঝ?

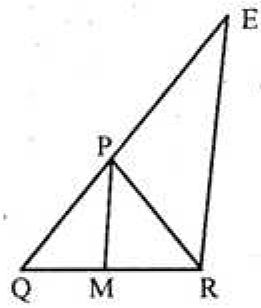
খ. প্রমাণ কর যে, $QM : MR = QP : PR$.

গ. PQR সমবাহু ত্রিভুজ এবং $PM \perp QR$ হলে প্রমাণ কর যে, $PM^2 = \frac{3}{4}PQ^2$.

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দুইটি ত্রিভুজের অনুরূপ কোণগুলো সমান হলে তাদের সদৃশকোণী ত্রিভুজ বলে।

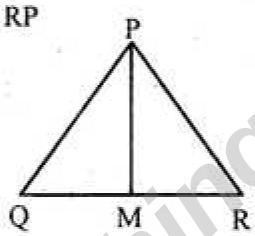
খ **বিশেষ নির্বচন:** ΔPQR এর $\angle P$ এর সমদ্বিখণ্ডক PM, QR কে M বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $QM : MR = QP : PR$



অঙ্কন: MP এর সমান্তরাল RE রেখাংশ বর্ধিত QP কে E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ: ধাপ	যথার্থতা
(১) যেহেতু $MP \parallel RE$ এবং QE ও PR তাদের ছেদক	
$\therefore$ $\angle PER = \angle QPM$	[অনুরূপ কোণ]
এবং $\angle PRE = \angle RPM$	[একান্তর কোণ]
(২) কিন্তু $\angle QPM = \angle RPM$	
$\therefore$ $\angle PRE = \angle PER$	
$\therefore$ $PR = PE$	
(৩) ΔQRE এর $RE \parallel MP$	[ধাপ-১]
বা, $\frac{QP}{PE} = \frac{QM}{RM}$	
বা, $QP : PE = QM : RM$	
$\therefore$ $QM : MR = QP : PR$ (প্রমাণিত)	

গ দেওয়া আছে, ΔPQR-সমবাহু অর্থাৎ $PQ = QR = RP$ এবং PM, QR এর ওপর লম্ব।



প্রমাণ করতে হবে যে, $PM^2 = \frac{3}{4}PQ^2$

প্রমাণ: $PM \perp QR$ [দেওয়া আছে]

$\therefore \angle PMQ = \angle PMR = 90°$.

এখন, সমকোণী ΔPQM এবং সমকোণী ΔPRM-এ

অতিভুজ PQ = অতিভুজ PR [$\because$ PQR সমবাহু ত্রিভুজ]

এবং PM সাধারণ বাহু।

$\therefore \Delta PQM \cong \Delta PRM$ [$\because$ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অতিভুজ এবং অপর একটি বাহু সমান]

সুতরাং, $QM = RM$

$\therefore QR = 2QM$

আবার, সমকোণী ΔPQM-এ $\angle PMQ = 90°$

এবং অতিভুজ = PQ.

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$PQ^2 = PM^2 + QM^2$

বা, $PM^2 = PQ^2 - QM^2$

বা, $4PM^2 = 4PQ^2 - 4QM^2$ [উভয়পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে]

বা, $4PM^2 = 4PQ^2 - (2QM)^2$

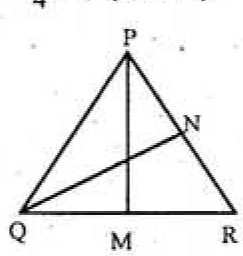
বা, $4PM^2 = 4PQ^2 - QR^2$ [$\because QR = 2QM$]

বা, $4PM^2 = 4PQ^2 - PQ^2$ [$\because PQ = QR$]

বা, $4PM^2 = 3PQ^2$.

$\therefore$ $PM^2 = \frac{3}{4}PQ^2$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ▶১০



PQR সমবাহু ত্রিভুজের PM ও QN মধ্যমা */মাওনা বহুমুখী উচ্চ বিদ্যালয়, শ্রীপুর, গাজীপুর/*

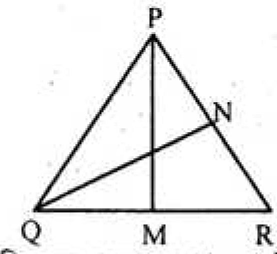
ক. প্রমাণ কর যে, $PM = QN$

খ. প্রমাণ কর যে, $PQ + PR > 2PM$

গ. $PQ^2 = PM^2 + QM^2$ হলে প্রমাণ কর যে, $\angle PMQ = 1$ সমকোণ

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, ΔPQR সমবাহু ত্রিভুজের PM ও QN মধ্যমা



প্রমাণ করতে হবে যে, $PM = QN$

প্রমাণ: ΔPQM ও ΔPQN-এ

$PQ = PQ$ [$\because$ সাধারণ বাহু]

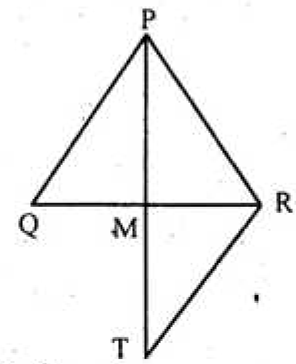
$QM = PN$ [$\because$ সমান সমান বাহুর অর্ধেক]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle PQM$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle QPN$ [$\because$ সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণ সমান]

$\therefore \Delta PQM \cong \Delta PQN$

$\therefore PM = QN$ **(প্রমাণিত)**

খ **বিশেষ নির্বচন:** দেওয়া আছে, ΔPQR সমবাহু ত্রিভুজের PM মধ্যমা।



প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ + PR > 2PM$

অঙ্কন: PM কে T পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করি যেন $TM = PM$ হয়। R, T যোগ করি।

প্রমাণ: ΔPQM ও ΔRTM-এ

$PM = TM$ [অঙ্কনানুসারে]

$QM = RM$ [$\because$ PM মধ্যমা]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle PMQ$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle TMR$ [বিপ্রতীপকোণ]

$\therefore \Delta PQM \cong \Delta RTM$

$\therefore PQ = TR$

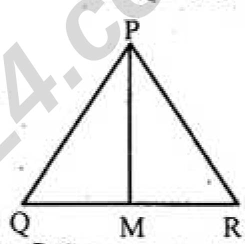
এখন, ΔPRT-এ $PR + TR > PT$

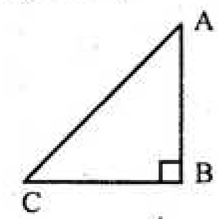
বা, $PR + PQ > PM + TM$ [$\because PQ = TR$]

বা, $PQ + PR > PM + PM$

$\therefore PQ + PR > 2PM$ **(প্রমাণিত)**

গ





বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔPQM-এ $PQ^2 = PM^2 + QM^2$

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle PMQ = 1$ সমকোণ।

অঙ্কন: এমন একটি ত্রিভুজ ABC আঁকি যার $\angle ABC = 1$ সমকোণ এবং $AB = PM$, $BC = QM$ হয়।

প্রমাণ: ΔABC-এ $\angle B = 1$ সমকোণ

$\therefore$ পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= PM^2 + QM^2$

$= PQ^2$

বা, $AC = PQ$ অর্থাৎ $PQ = AC$

এখন, ΔPQM ও ΔABC-এ

$PQ = AC$ [প্রমাণ অনুসারে]

$QM = BC$ [অঙ্কনানুসারে]

এবং $PM = AB$ [অঙ্কনানুসারে]

$\therefore$ $\Delta PQM \cong \Delta ABC$

$\therefore$ $\angle PMQ = \angle ABC$

কিন্তু $\angle ABC = 1$ সমকোণ সুতরাং $\angle PMQ = 1$ সমকোণ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶১১ ABC সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। BC এর অতিভুজ এবং P, BC এর উপর যে কোন বিন্দু। BA বাহুকে D পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হয়েছে যেন $BA = AD$ হয়। */বিদ্যাময়ী সরকারী বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ময়মনসিংহ/*

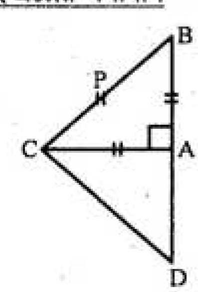
ক. উপরোক্ত তথ্যসমূহ চিত্রের সাহায্যে উপস্থাপন কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$

গ. দেখাও যে, $\angle BCD$ = এক সমকোণ।

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক

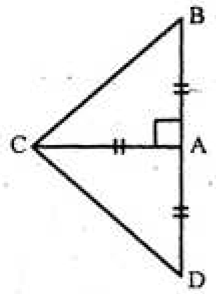


$AB = AD$

$\therefore AB = AD = AC$

খ ৬ (গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ দেওয়া আছে, ΔABC-এ $AB = AC$। BA কে D পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হয়েছে যেন $BA = AD$ হয়। C, D যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BCD = 90°$ বা এক সমকোণ।



প্রমাণঃ ধাপ — যথার্থতা

(১) ΔABC-এ $AB = AC$

$\therefore \angle ACB = \angle ABC$ .... (i) [$\because$ সমান-সমান বাহুর বিপরীত কোণ]

ΔADC-এ $AD = AC$

$\therefore \angle ACD = \angle ADC$ .... (ii) [$\because$ সমান-সমান বাহুর বিপরীত কোণ]

(২) (i) + (ii)

$\angle ACB + \angle ACD = \angle ABC + \angle ADC$

বা, $\angle BCD = \angle DBC + \angle BDC$ ... ... (iii)

(৩) এখন ΔBCD-এ

$\angle BCD + \angle DBC + \angle BDC = 180°$ [$\because$ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি = 180°]

বা, $\angle BCD + \angle BCD = 180°$ [(iii) নং এর সাহায্যে]

বা, $2\angle BCD = 180°$

বা, $\angle BCD = \frac{180°}{2}$

$\therefore \angle BCD = 90°$ বা এক সমকোণ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১২ ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle A$ = এক সমকোণ এবং BE ও CF দুইটি মধ্যমা। *[রাজশাহী সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়]*

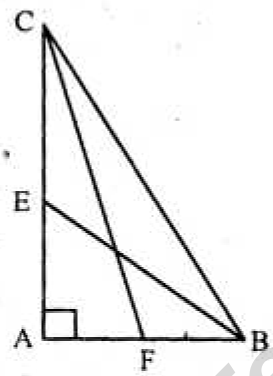
ক. উপরের তথ্য অনুযায়ী চিত্র অঙ্কন কর।

খ. দেখাও যে, $BC^2 = CF^2 + FB^2 + 2AF.FB$

গ. প্রমাণ কর যে, $4(BE^2 + CF^2) = 5BC^2$

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



চিত্রে, ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle A$ = এক সমকোণ। BE ও CF দুইটি মধ্যমা।

খ 'ক' এর চিত্র থেকে পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$BC^2 = AC^2 + AB^2$ [যেহেতু $\angle A$ = এক সমকোণ]

বা, $BC^2 = AC^2 + (AF + BF)^2$

বা, $BC^2 = AC^2 + AF^2 + BF^2 + 2AF.BF$ .... (i)

আবার, সমকোণী ΔACF এ $CF^2 = AC^2 + AF^2$ .... (ii)

এখন (i) ও (ii) নং থেকে পাই,

$BC^2 = CF^2 + BF^2 + 2AF.BF$

$\therefore BC^2 = CF^2 + BF^2 + 2AF.FB$ **(দেখানো হলো)**

গ 'ক' এর চিত্রে, $\angle A$ = এক সমকোণ।

BE ও CF যথাক্রমে AC ও AB বাহুর মধ্যমা।

প্রমাণ করতে হবে যে, $4(BE^2 + CF^2) = 5BC^2$

প্রমাণ: ধাপ — যথার্থতা

(১) সমকোণী ত্রিভুজ ABC এ

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ .... (i) [পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

(২) সমকোণী ত্রিভুজ ABE এ

$BE^2 = AB^2 + AE^2$ .... (ii)

(৩) সমকোণী ত্রিভুজ ACF এ

$CF^2 = AC^2 + AF^2$ .... (iii)

(৪) (ii) ও (iii) নং যোগ করে পাই,

$BE^2 + CF^2 = AB^2 + AE^2 + AC^2 + AF^2$

বা, $4(BE^2 + CF^2) = 4AB^2 + 4AE^2 + 4AC^2 + 4AF^2$ [4 দ্বারা গুণ করে]

$= 4AB^2 + 4AC^2 + (2AE)^2 + (2AF)^2$ [$\because AC = 2AE$ এবং $AB = 2AF$]

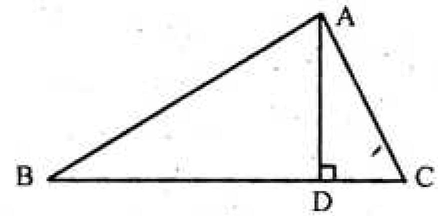
$= 4AB^2 + 4AC^2 + AC^2 + AB^2$

$= 5(AB^2 + AC^2)$

$= 5BC^2$ [(i) নং থেকে]

$\therefore 4(BE^2 + CF^2) = 5BC^2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১৩



চিত্রে উল্লেখিত ΔABC এর পরিসীমা রম্বস ABCD এর পরিসীমার সমান। ABC ত্রিভুজের পরিসীমা 12 সে.মি.। *[পি এন সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, রাজশাহী]*

ক. চতুর্ভুজ কত প্রকার ও কি কি?

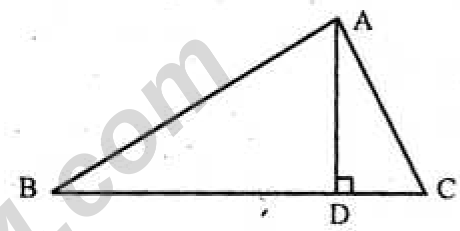
খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC. CD$

গ. ABCD রম্বসের একটি কোণ $\angle C = 45°$ হলে রম্বসটি অংকন কর। (অংকনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক)।

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক চতুর্ভুজ ছয় প্রকার। যথা- ১. বর্গক্ষেত্র; ২. রম্বস; ৩. সামান্তরিক; ৪. আয়তক্ষেত্র; ৫. ট্রাপিজিয়াম; ৬. ঘুড়ি

খ



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC এর $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ। AD, BC এর ওপর লম্ব।

অর্থাৎ $\angle ADB = \angle ADC = 90°$.

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC{\cdot}CD$.

প্রমাণ : ধাপ — যথার্থতা

(১) ΔACD এ $\angle ADC$ = এক সমকোণ এবং অতিভুজ AC.

$\therefore AC^2 = AD^2 + CD^2$ ... ... (i) [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

(২) ΔABD এ $\angle ADB$ = এক সমকোণ এবং অতিভুজ AB.

$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

$= AD^2 + (BC - CD)^2$ [$\because BD = BC - CD$]

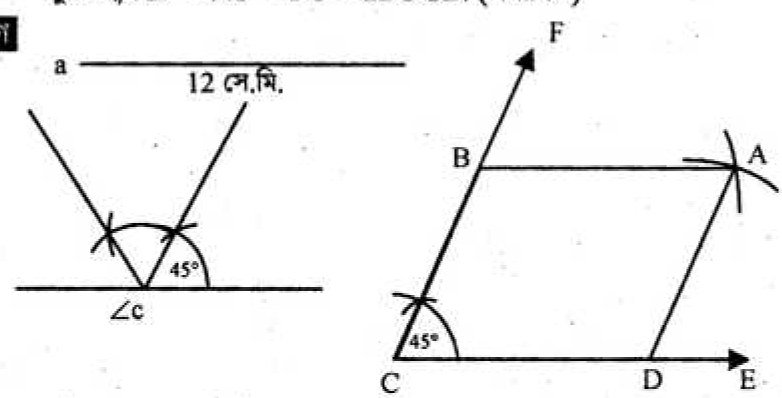
$= AD^2 + BC^2 + CD^2 - 2BC{\cdot}CD$ [সূত্র ব্যবহার করে]

$= (AD^2 + CD^2) + BC^2 - 2BC{\cdot}CD$

$= AC^2 + BC^2 - 2BC{\cdot}CD$ [(i) নং থেকে]

সুতরাং, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC{\cdot}CD$. **(প্রমাণিত)**

গ



দেওয়া আছে ABCD রম্বসটির পরিসীমা a = 12 সে.মি. যা ΔABC এর পরিসীমার সমান। এমন একটি রম্বস আঁকতে হবে যার $\angle C = 45°$ এবং যার পরিসীমা a এর সমান।

অঙ্কন: (১) যেকোনো রশ্মি CE থেকে $CD = \frac{a}{4} = 3$ সে.মি. কেটে নেই। C বিন্দুতে $\angle DCF = 45°$ আঁকি।

(২) এখন CF রেখা থেকে $\frac{a}{4}$ এর সমান করে CB অংশ কেটে নেই।

(৩) এবার B ও D কে কেন্দ্র করে $\angle FCE$ এর অভ্যন্তরে $\frac{a}{4}$ এর সমান করে দুটি বৃত্তচাপ আঁকি যা A বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন, B, A ও D, A যোগ করি। তাহলে ABCD-ই নির্ণেয় রম্বস।

প্রশ্ন ▶ ১৪ ΔABC এর $\angle ABC > \angle ACB$ এবং BC তার ভূমি। অপর একটি ΔDBC. যার ভূমিও BC. *[গভঃ ল্যাবরেটরী হাই স্কুল, রাজশাহী]*

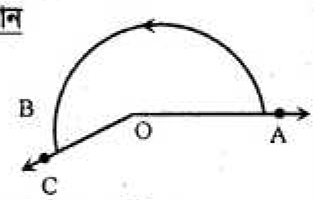
ক. প্রবৃদ্ধ কোণ কাকে বলে? এঁকে দেখাও। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AC > AB$. ৪

গ. ABC ও DBC ত্রিভুজদ্বয় একই ভূমি BC এর উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগল BC ও AD এর মধ্যে অবস্থিত। প্রমাণ কর যে, Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল = Δ ক্ষেত্র DBC এর ক্ষেত্রফল। ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **প্রবৃদ্ধ কোণ :** দুই সমকোণ থেকে বড় কিন্তু চার সমকোণ থেকে ছোট কোণকে প্রবৃদ্ধকোণ বলা হয়। চিত্রে চিহ্নিত $\angle AOC$ প্রবৃদ্ধকোণ।



খ মাধ্যমিক গণিত পাঠ্য বইয়ের অধ্যায়-৬, উপপাদ্য-১৩ দ্রষ্টব্য।

গ মাধ্যমিক গণিত পাঠ্য বইয়ের অধ্যায়-১৫, উপপাদ্য-১ নং দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ১৫ মনে কর : $a = 3.5$ সে.মি., $\angle x = 60°$ *[বিয়াম মডেল স্কুল ও কলেজ, বগুড়া]*

ক. ত্রিভুজ সর্বসমতার যেকোন দুটি শর্ত লেখ।

খ. a বাহু বিশিষ্ট ABC সমবাহু ত্রিভুজের $AD \perp BC$ হলে দেখাও যে, $4AD^2 = 3AB^2$

গ. a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তে এমন দু'টি স্পর্শক আঁক যেন তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ x এর সমান হয়।

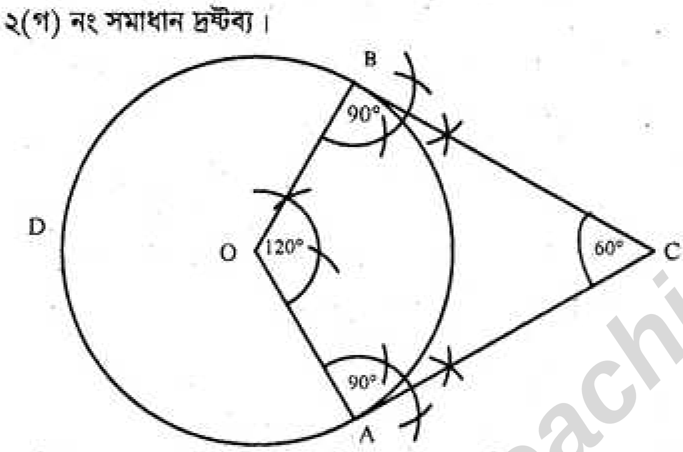
১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক (১) যদি দুইটি ত্রিভুজের একটির দুই বাহু যথাক্রমে অপরটির দুই বাহুর সমান হয় এবং বাহু দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ দুইটি পরস্পর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

(২) যদি একটি ত্রিভুজের তিনবাহু যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের তিন বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হবে।

খ ২(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABD একটি বৃত্ত যার ব্যাসার্ধ, $a = 3.5$ সে.মি.। ABD বৃত্তে এরূপ দু'টি স্পর্শক আঁকতে হবে যাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle x = 60°$ হয়।

অঙ্কন: (১) OA যেকোনো ব্যাসার্ধ নিই এবং $\angle AOB = 120°$ আঁকি। OB রশ্মি বৃত্তটিকে B বিন্দুতে ছেদ করে।

(২) OB রেখার ওপর B বিন্দুতে এবং OA রেখার ওপর A বিন্দুতে দুটি লম্ব টানি। মনে করি, এই লম্বদ্বয় C বিন্দুতে মিলিত হয়।

তাহলে, AC ও BC-ই নির্ণেয় স্পর্শকদ্বয়, যাদের অন্তর্ভুক্ত $\angle ACB = 60°$ হবে।

প্রশ্ন ▶ ১৬ কোন একটি সমবাহু ত্রিভুজে পরিসীমা, $P = 9$ সে.মি.। *[জয়পুরহাট গার্লস ক্যাডেট কলেজ]*

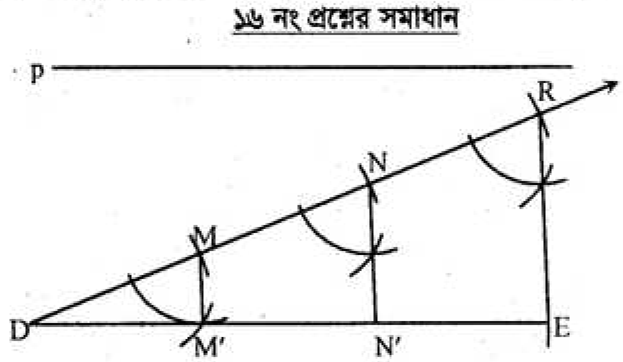
ক. $\frac{P}{3}$ অংকন কর সংক্ষিপ্ত বর্ণনা দাও।

খ. ত্রিভুজটি অংকন কর (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক)।

গ. যদি AD, ΔABC এর মধ্যমা হয় তাহলে প্রমাণ কর যে, $4AD^2 = 3AB^2$

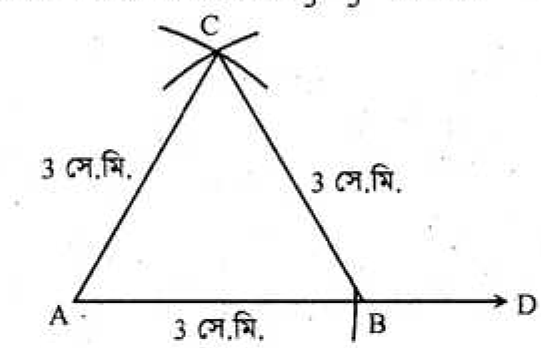
১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



মনে করি, $DE = P = 9$ সে.মি.। এখন যেকোনো একটি কোণ EDR আঁকি। যেখানে, $DM = MN = NR$; R, E যোগ করি। M ও N বিন্দুতে $RE \parallel NN'$ এবং $RE \parallel MM'$ আঁকি। তাহলে DM-ই হলো $\frac{P}{3} = \frac{9}{3} = 3$ সে.মি.

খ



(ক) হতে পাই, সমবাহু ত্রিভুজটির এক বাহুর দৈর্ঘ্য 3 সে.মি. ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অংকনের বিবরণ:

১. যেকোনো রশ্মি AD থেকে $AB = DM' = 3$ সে.মি. অংশ কেটে নেই।

২. A ও B কে কেন্দ্র করে 3 সে.মি. এর সমান দৈর্ঘ্য নিয়ে AB এর যেকোনো এক পাশে দুটি বৃত্তচাপ অংকন করি।

৩. বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করে। A, C ও B, C যোগ করি।

৪. তাহলে ABC-ই নির্ণেয় সমবাহু ত্রিভুজ।

গ ২(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ১৭ একটি সমবাহু ত্রিভুজ PQR এর পরিসীমা ৪ সে.মি.। এর অভ্যন্তরে S যে কোন একটি বিন্দু এবং PM একটি মধ্যমা। *[রংপুর জিলা স্কুল, রংপুর]*

উপরের তথ্য অনুযায়ী নিম্নের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

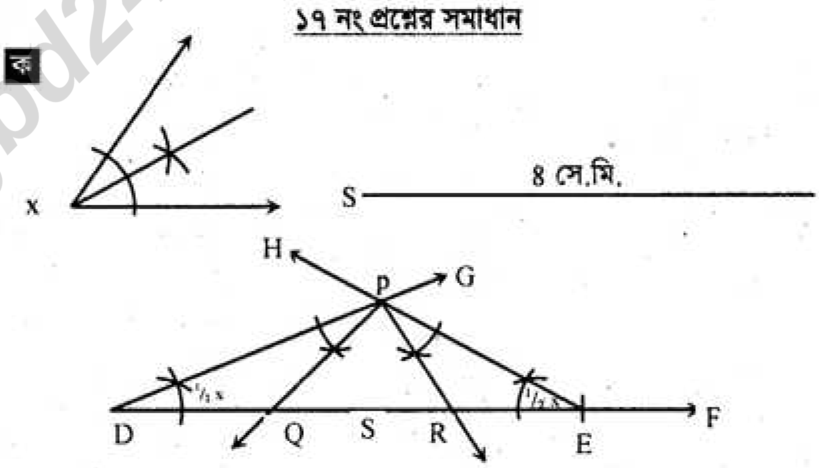
ক. PQR ত্রিভুজটি অংকন কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $PQ + PR > QS + SR$.

গ. প্রমাণ কর যে, PQR ত্রিভুজটির বাহুগুলোর উপর অঙ্কিত বর্গের সমষ্টি, মধ্যমাটির উপর অঙ্কিত বর্গের 4 গুণের সমান।

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক

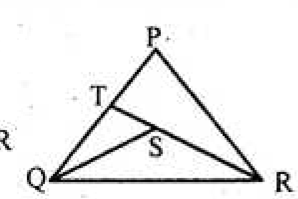


চিত্রে, PQR একটি সমবাহু ত্রিভুজ। যার পরিসীমা $S = 8$ সে.মি.।

খ **বিশেষ নির্বচন:** মনে করি, PQR সমবাহু ত্রিভুজের অভ্যন্তরে S একটি বিন্দু। Q, S ও R, S যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ + PR > QS + SR$

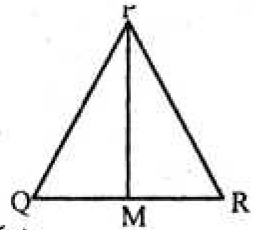
অঙ্কন: RS কে T পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন তা PQ বাহুকে T বিন্দুতে ছেদ করে।



প্রমাণ: ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔPRT এ $PR + PT > RT$	[ত্রিভুজের যে কোনো দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর]
$\therefore PR + PT > RS + ST$	[$\because RT = RS + ST$]
(২) আবার, ΔTQS এ $ST + QT > QS$ .... (ii)	
(i) নং ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই, $PR + PT + ST + QT > RS + ST + QS$	
বা, $PR + PQ + ST > QS + RS + ST$	[$\because PT + QT = PQ$]
$\therefore PQ + PR > QS + SR$	[উভয় পক্ষ থেকে ST বাদ দিয়ে]

(প্রমাণিত)

গ বিশেষ নির্বচন: মনেকরি, PQR সমবাহু ত্রিভুজের একটি মধ্যমা PM।
প্রমাণ করতে হবে যে, $3PQ^2 = 4PM^2$



প্রমাণ: ধাপ — **যথার্থতা**

(১) $PM \perp QR$ [সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমা বিপরীত বাহুর লম্ব সমদ্বিখন্ডক]

এবং $QM = RM$

$\therefore \angle PMQ = \angle PMR = 90°$

(২) PQM সমকোণী ত্রিভুজে

$PQ^2 = PM^2 + QM^2$ [পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

বা, $PQ^2 - QM^2 = PM^2$

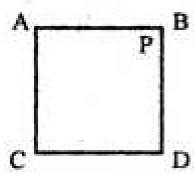
বা, $4PQ^2 - 4QM^2 = 4PM^2$ [4 দ্বারা গুণ করে]

বা, $4PQ^2 - (2QM)^2 = 4PM^2$

বা, $4PQ^2 - PQ^2 = 4PM^2$ [$2QM = QR = PQ$]

$\therefore 3PQ^2 = 4PM^2$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ▶১৮ মনে কর, কোন বিদ্যালয়ের A, B, C, D চারটি বিন্দুতে চারটি ক্লাসরুম। P বিন্দুতে প্রধান শিক্ষক মহোদয়ের কক্ষ। A, B, C, D বিন্দুগুলো একটি আয়ত গঠন করে।



ক. পীথাগোরাসের উপপাদ্যটি লিখ।

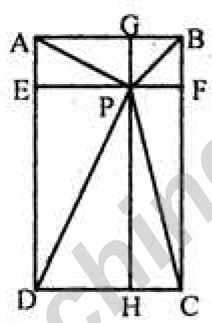
খ. দেখাও যে, Δক্ষেত্র PAB + Δক্ষেত্র PCD $= \frac{1}{2}$ আয়তক্ষেত্র ABCD.

গ. প্রমাণ কর যে, প্রধান শিক্ষক মহোদয়ের কক্ষ হতে শ্রেণি কক্ষগুলোর দূরত্বের সম্পর্ক হবে $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$ *[রংপুর জিলা স্কুল, রংপুর]*

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **পীথাগোরাসের উপপাদ্য:** সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অংকিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, অপর দুই বাহুর উপর অংকিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি সমান।

খ মনেকরি, ABCD আয়তক্ষেত্রের A, B, C ও D বিন্দুতে চারটি ক্লাসরুম অবস্থিত। আয়তক্ষেত্রের মাঝে P বিন্দুতে প্রধান শিক্ষকের কক্ষ। P, A; P, B; P, C ও P, D যোগ করি।
প্রমাণ করতে হবে যে, Δক্ষেত্র PAB + Δক্ষেত্র PCD $= \frac{1}{2}$ (আয়তক্ষেত্র ABCD)।



অঙ্কন: $EF \parallel DC$ ও $GH \parallel BC$ আঁকি।

প্রমাণ: ধাপ — **যথার্থতা**

(১) যেহেতু $EF \parallel DC$, $GH \parallel BC$ এবং ABCD একটি আয়তক্ষেত্র।
সুতরাং AGPE, GPFB, PFCH ও PHDE প্রত্যেকটি আয়তক্ষেত্র এবং AP, PB, PC ও PD যথাক্রমে এদের কর্ণ।

সুতরাং Δ ক্ষেত্র PGB = Δ ক্ষেত্র PBF [আয়তক্ষেত্রের কর্ণ, আয়তক্ষেত্রকে সমান দুই ভাগে ভাগ করে]

$\therefore \Delta PGB = \frac{1}{2}$ আয়তক্ষেত্র GPFB .... (i)

তদ্রুপ $\Delta PAG = \frac{1}{2}$ আয়তক্ষেত্র AGPE....... (ii)

$\Delta PCH = \frac{1}{2}$ আয়তক্ষেত্র PFCH........ (iii)

$\Delta PHD = \frac{1}{2}$ আয়তক্ষেত্র PHDE........ (iv)

(i) নং, (ii) নং, (iii) নং ও (iv) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$\Delta PGB + \Delta PAG + \Delta PCH + \Delta PHD = \frac{1}{2}$ আয়তক্ষেত্র (GPFB + AGPE + PFCH + PHDE)

বা, $\Delta PAB + \Delta PCD = \frac{1}{2}$ আয়তক্ষেত্র ABCD [$\because \Delta PGB + \Delta PAG = \Delta PAB$, $\Delta PCH + \Delta PHD = \Delta PCD$]

$\therefore \Delta$ ক্ষেত্র PAB + Δ ক্ষেত্র PCD $= \frac{1}{2}$ আয়তক্ষেত্র ABCD।

(দেখানো হলো)

গ **প্রমাণ: ধাপ** — **যথার্থতা**

(১) যেহেতু $EF \parallel BC$ এবং $GH \parallel BC$

$\therefore BF = PG$

$ED = PH = CF$

$AG = DH$

(২) সমকোণী ΔPAG এ

$PA^2 = PG^2 + AG^2$ [পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

$\therefore PA^2 = BF^2 + DH^2$ .... (i)

আবার, ΔPEC এ

$PC^2 = PF^2 + CF^2$ [একই কারনে]

$\therefore PC^2 = PF^2 + PH^2$ .... (ii)

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$PA^2 + PC^2 = BF^2 + DH^2 + PF^2 + PH^2$

$= (BF^2 + PF^2) + (DH^2 + PH^2)$

$\therefore PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$ [ΔPBF ও Δ PDH এ পীথাগোরাসের উপপাদ্য প্রয়োগ করে]

(প্রমাণিত)

প্রশ্ন ▶১৯ PQR সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ RQ এর উপর M যে কোনো বিন্দু। D, PQ এর উপর একটি বিন্দু। *[কর্তার গার্ড পাবলিক স্কুল অ্যান্ড কলেজ, রংপুর]*

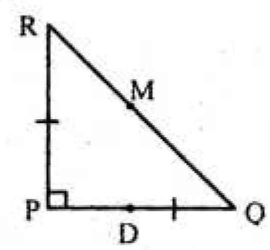
ক. তথ্যগুলো চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করো।

খ. দেখাও যে, $RQ^2 + PD^2 = PQ^2 + RD^2$.

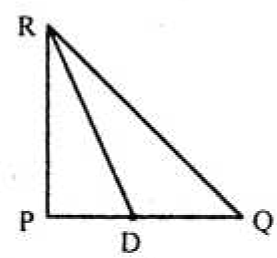
গ. প্রমাণ কর যে, $MR^2 + MQ^2 = 2PM^2$.

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক PQR সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ RQ এর উপর M যে কোনো বিন্দু। D, PQ এর উপর একটি বিন্দু।



খ ΔPQR এর $\angle P$ = এক সমকোণ এবং D, PQ এর উপরস্থ একটি বিন্দু। R, D যোগ করি।
প্রমাণ করতে হবে যে,
$RQ^2 + PD^2 = PQ^2 + RD^2$



প্রমাণ: ধাপ — **যথার্থতা**

(১) ΔPQR সমকোণী। যার অতিভুজ RQ

$\therefore RQ^2 = PR^2 + PQ^2$ .... (i) [পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

(২) আবার, ΔPRD সমকোণী যার অতিভুজ RD [একই কারনে]

$RD^2 = RP^2 + PD^2$

বা, $PD^2 = RD^2 - RP^2$ .... (ii)

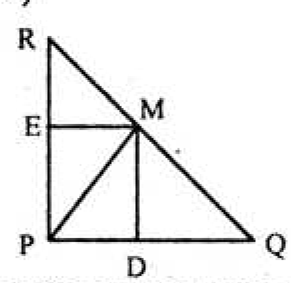
(৩) (i) নং ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$RQ^2 + PD^2 = PR^2 + PQ^2 + RD^2 - RP^2$

বা, $RQ^2 + PD^2 = PR^2 + PQ^2 + RD^2 - PR^2$

$\therefore RQ^2 + PD^2 = PQ^2 + RD^2$ (দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে, PQR সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ RQ এর উপর M যেকোনো বিন্দু। M, RQ এর উপর একটি বিন্দু।
P, M যোগ করি।
প্রমাণ করতে হবে যে,
$MR^2 + MQ^2 = 2PM^2$



অঙ্কন: M বিন্দু থেকে PR ও PQ বাহুর উপর যথাক্রমে MD ও ME লম্ব আঁকি।

প্রমাণ: ধাপ — **যথার্থতা**

(১) ΔPQR এর $\angle P = 90°$ এবং [দেওয়া আছে]

$PQ = PR$ হওয়ায় $\angle R = \angle Q = 45°$ [সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণগুলো সমান।

(২) এখন, ΔMDQ এর $\angle D = 90°$ [$\because MD \perp PQ$]

সুতরাং $\angle DMQ = \angle MQD = 45°$

$\therefore MD = DQ$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়,

ΔMRE সমকোণী ত্রিভুজে,

$ME = RE$

(৩) এখন, MDQ সমকোণী ত্রিভুজে,

MQ অতিভুজ হওয়ায়,

$MQ^2 = MD^2 + DQ^2 = MD^2 + MD^2$

$MQ^2 = 2MD^2$ .... (i)

(৪) আবার, MRE সমকোণী ত্রিভুজে,

MR অতিভুজ হওয়ায়, $MR^2 = EM^2 + RE^2$

$= ME^2 + ME^2$

$= 2ME^2$ .... (ii)

(৫) (i) নং ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$MQ^2 + MR^2 = 2MD^2 + 2ME^2$

$= 2(MD^2 + ME^2)$

আবার, MEPD একটি আয়তক্ষেত্র [$\because \angle E = \angle P = \angle D =$ এক সমকোণ]

$PD = ME$ [আয়তক্ষেত্রের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান]

$\therefore MQ^2 + MR^2 = 2(MD^2 + PD^2)$ .... (iii)

(৬) MDP সমকোণী ত্রিভুজে, PN অতিভুজ হওয়ায়, $PM^2 = PD^2 + MD^2$

[পীথাগোরাসের উপপাদ্য]

(iii) নং থেকে

$MQ^2 + MR^2 = 2PM^2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ২০ ΔABC এবং ΔDEF দুইটি সদৃশ ত্রিভুজ।

[ঠিকুরগাঁও সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়]

ক. ত্রিভুজ দুইটির অনুরূপ বাহু ও অনুরূপ কোণগুলোর নাম লিখ।

খ. প্রমাণ কর যে, $\frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{AC^2}{DF^2} = \frac{BC^2}{EF^2}$

গ. যদি AD, ΔABC-এর মধ্যমা হয় তবে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ΔABC ও ΔDEF এর অনুরূপ বাহুগুলো হলো :

AB ও DE; AC ও DF এবং BC ও EF এবং অনুরূপ কোণগুলো হলো:

$\angle A$ ও $\angle D$; $\angle B$ ও $\angle E$ এবং $\angle C$ ও $\angle F$.

খ মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১৪.২ এর উপপাদ্য-৮ দ্রষ্টব্য।

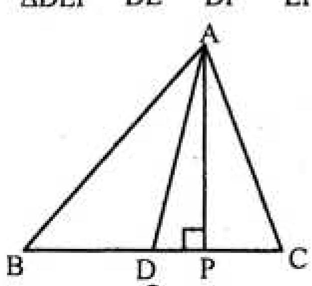
অতঃপর

(৬) আবার, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

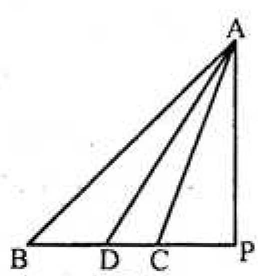
$\therefore \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{AC^2}{DF^2} = \frac{BC^2}{EF^2}$

$\therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{AC^2}{DF^2} = \frac{BC^2}{EF^2}$ **(প্রমাণিত)**

গ



চিত্র-১



চিত্র-২

বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এর মধ্যমা AD। দেখাতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$

অঙ্কন: A বিন্দু থেকে BC-এর (বা, তার বর্ধিতাংশের চিত্র (২)) ওপর AP লম্ব টানি।

প্রমাণ : ধাপ **যথার্থতা**

(১) ΔADP-এ, $\angle APD = 90°$ এবং অতিভুজ AD.

$AD^2 = AP^2 + DP^2$ ... ... (i) [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

(২) ΔABP- এ, $\angle APB = 90°$ এবং অতিভুজ AB.

$\therefore AB^2 = AP^2 + BP^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

$= AP^2 + (BD + DP)^2$ [$\because BP = BD + DP$]

$= AP^2 + BD^2 + DP^2 + 2BD \cdot DP$

$= (AP^2 + DP^2) + BD^2 + 2BD \cdot DP$

$= AD^2 + BD^2 + 2BD \cdot DP$ [(i) নং থেকে, $AD^2 = AP^2 + DP^2$]

$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD \cdot DP$ ... ... (ii)

(২) ΔACP-এ, $\angle APC = 90°$ এবং অতিভুজ AC.

$\therefore AC^2 = AP^2 + CP^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

বা, $AC^2 = AP^2 + (CD - DP)^2$ [$\because$ ১ নং চিত্রে, $CP = CD - DP$ এবং ২ নং চিত্রে, $CP = DP - CD$]

কিন্তু, $(CD - DP)^2 = (DP - CD)^2 = CD^2 + DP^2 - 2CD.DP$

$\therefore AC^2 = AP^2 + CD^2 + DP^2 - 2CD \cdot DP$

$= (AP^2 + DP^2) + BD^2 - 2BD \cdot DP$ [$\because$ AD, BC বাহুর মধ্যমা $\therefore CD = BD$]

$= AD^2 + BD^2 - 2BD \cdot DP$ [$\because$ (i) নং থেকে $AD^2 = AP^2 + DP^2$]

$\therefore AC^2 = AD^2 + BD^2 - 2BD \cdot DP$ ... ... (iii)

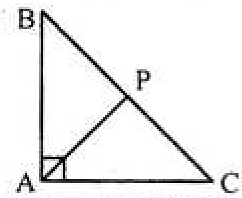
(৩) (ii) নং ও (iii) নং যোগ করে পাই,

$AB^2 + AC^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD \cdot DP + AD^2 + BD^2 - 2BD \cdot DP$

$= 2AD^2 + 2BD^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

$\therefore AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ২১



[সৈয়দপুর সরকারি কারিগরী কলেজ, নীলফামারী]

ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle A$ সমকোণ।

ক. পীথাগোরাসের উপপাদ্যটি লেখ।

খ. ইউক্লিডিয় পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $BC^2 = AB^2 + AC^2$

গ. চিত্র হতে প্রমাণ কর যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$

২১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবইয়ের অনু-১৫ এর উপপাদ্য-৩ এর সাধারণ নির্বচন দ্রষ্টব্য।

খ মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবইয়ের অনু-১৫, উপপাদ্য-৩ এর প্রমাণ দ্রষ্টব্য।

[বি.দ্র. বইয়ের প্রমাণে A এর স্থলে C এবং C এর স্থলে A হবে।]

গ ৬ (গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ২২ সমবাহু ΔLMN এ $LX \perp MN$। *[কুমিল্লা জিলা স্কুল, কুমিল্লা]*

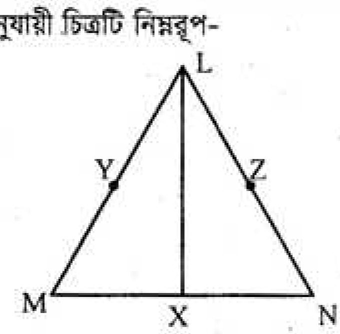
ক. তথ্য অনুযায়ী চিত্র অংকন কর এবং LM ও LN বাহুর মধ্যবিন্দু চিহ্নিত কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $4LX^2 = 3LM^2$

গ. যদি LM ও LN এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে Y ও Z হয় তাহলে প্রমাণ কর যে, Δ ক্ষেত্রে LYZ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{4}$(Δ ক্ষেত্র LMN এর ক্ষেত্রফল)

২২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক তথ্য অনুযায়ী চিত্রটি নিম্নরূপ-



চিত্রে, LM ও LN বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে Y ও Z।

খ 'ক' এর চিত্র থেকে,

দেওয়া আছে, ΔLMN সমবাহু। $LX \perp MN$।

প্রমাণ করতে হবে, $4LX^2 = 3LM^2$

প্রমাণ: ধাপ **যথার্থতা**

(১) $LX \perp MN$ [দেওয়া আছে]

$\therefore \angle LXM = \angle LXN = 90°$

এখন, (২) সমকোণী ΔLMX এবং সমকোণী ΔLXN এ,

অতিভুজ LM = অতিভুজ LN [$\because$ LMN সমবাহু ত্রিভুজ]

এবং LX সাধারণ বাহু।

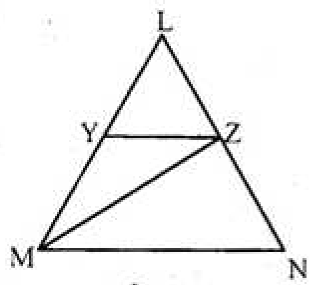
$\therefore \Delta LMX \cong \Delta LNX$ [$\because$ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অতিভুজ এবং অপর একটি বাহু সমান]

সুতরাং $MX = NX$

$\therefore MN = 2MX$

আবার, সমকোণী ΔLMX এ
$\angle LXM = 90^\circ$
এবং অতিভুজ = LM
পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,
$LM^2 = LX^2 + MX^2$
বা, $LX^2 = LM^2 - MX^2$
বা, $4LX^2 = 4LM^2 - 4MX^2$ [উভয়পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে]
বা, $4LX^2 = 4LM^2 - (2MX)^2$
বা, $4LX^2 = 4LM^2 - MN^2$ [$\because MN = 2MX$]
বা, $4LX^2 = 4LM^2 - LM^2$ [$\because LM = MN$]
$\therefore 4LX^2 = 3LM^2$ **(প্রমাণিত)**

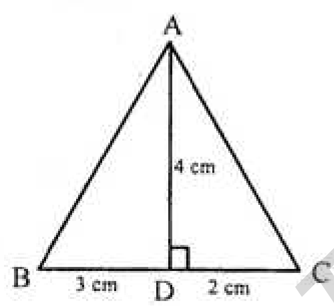
গ দেওয়া আছে, LM ও LN এর মধ্যবিন্দু Y ও Z। Y, Z যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, Δক্ষেত্র LYZ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{4}$ (Δ ক্ষেত্র LMN এর ক্ষেত্রফল)



অঙ্কন: Z, M যোগ করি।
প্রমাণ: ধাপ — যথার্থতা
(১) ΔLMZ এ, YZ, LM এর ওপর মধ্যমা।
Δ-ক্ষেত্র LYZ $= \frac{1}{2}(\Delta LMZ)$ [$\because$ YZ মধ্যমা Δ ক্ষেত্র ΔLMZ কে সমদ্বিখন্ডিত করে]

আবার, (২) ΔLMN এ, MZ, LN এর ওপর মধ্যমা।
$\therefore \Delta$ ক্ষেত্র LMZ $= \frac{1}{2}$ (Δ ক্ষেত্র LMN) [একই কারণে]
$\therefore \Delta$ ক্ষেত্র LYZ $= \frac{1}{2}\{\frac{1}{2}$ (Δ ক্ষেত্র LMN)}
$= \frac{1}{4}$ (Δ ক্ষেত্র LMN)
$\therefore \Delta$ ক্ষেত্র LYZ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{4}$ (Δ ক্ষেত্র LMN এর ক্ষেত্রফল) **(প্রমাণিত)**

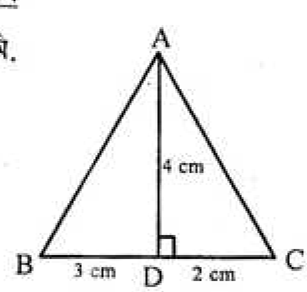
প্রশ্ন ▶ ২৩



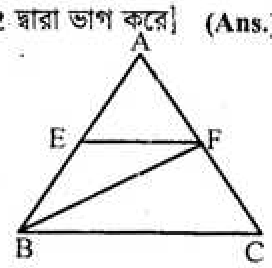
ক. Δ ক্ষেত্র ABD : Δ ক্ষেত্র ACD = কত?
খ. AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F হলে প্রমাণ কর যে, Δ ক্ষেত্র AEF $= \frac{1}{4}\Delta$ক্ষেত্র ABC.
গ. এরূপ একটি সামান্তরিক অঙ্কন কর যার একটি কোণ 60° এবং ক্ষেত্রফল ABC এর ক্ষেত্রফলের সমান। [অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক]
[ইবনে তাইমিয়া স্কুল এন্ড কলেজ, কুমিল্লা]

২৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক Δ ক্ষেত্র ABD $= \frac{1}{2} \times BD \times AD$ বর্গ সে.মি.
$= \frac{1}{2} \times 3 \times 4$ বর্গ সে.মি.
$= 6$ বর্গ সে.মি.
Δ ক্ষেত্র ADC $= \frac{1}{2} \times 2 \times 4$
$= 4$ বর্গ সে.মি.
$\therefore \Delta$ ক্ষেত্র ABD : Δ ক্ষেত্র ADC $= 6 : 4$
$= 3 : 2$ [2 দ্বারা ভাগ করে] **(Ans.)**



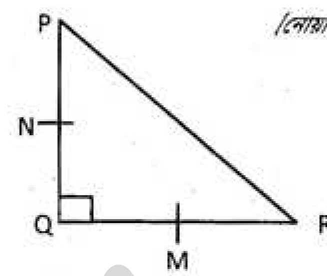
খ মনে করি, ΔABC এ AB ও AC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F। E, F যোগ করি।
প্রমাণ করতে হবে যে,
Δ ক্ষেত্র AEF $= \frac{1}{4}$(Δ ক্ষেত্র ABC)



অঙ্কন: B, F যোগ করি।
প্রমাণ: ধাপ — যথার্থতা
(১) ΔABC এ BF, AC এর উপর অঙ্কিত মধ্যমা
সুতরাং, Δ ক্ষেত্র ABF $= \frac{1}{2}$ (Δ ক্ষেত্র ABC) .... (i) [মধ্যমা Δ ক্ষেত্রকে সমদ্বিখন্ডিত করে]
(২) আবার ΔABF এ,
EF, AB বাহুর উপর মধ্যমা।
$\therefore \Delta$ ক্ষেত্র AEF $= \frac{1}{2}$ (Δ ক্ষেত্র ABF) .... (ii) [একই কারণে]
(i) নং ও (ii) নং সমীকরণ হতে পাই,
Δ ক্ষেত্র AEF $= \frac{1}{2}\{\frac{1}{2}$ (Δ ক্ষেত্র ABC)}
$\therefore \Delta$ ক্ষেত্র AEF $= \frac{1}{4}$ (Δ ক্ষেত্র ABC) **(প্রমাণিত)**

গ মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১৫ এর সম্পাদ্য-১ দ্রষ্টব্য।
বি:দ্র: $\angle x = 60^\circ$ নিতে হবে।

প্রশ্ন ▶ ২৪ *[নোয়াখালি সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়]*

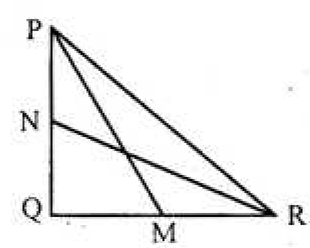


M ও N যথাক্রমে QR ও PQ এর মধ্যবিন্দু।
ক. $\angle P = 2\angle R$ হলে, $\angle P$ এর পরিমাণ নির্ণয় কর।
খ. প্রমাণ কর যে, $4(MP^2 + RN^2) = 5PR^2$
গ. PR এর মধ্যবিন্দু S হলে, প্রমাণ কর যে, $QS = \frac{1}{2}PR$.

২৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, ΔPQR এ $\angle Q = 90^\circ$ এবং $\angle P = 2\angle R$
আমরা জানি, ত্রিভুজের তিনকোণের সমষ্টি 180°
$\therefore \Delta PQR$ এ, $\angle P + \angle Q + \angle R = 180^\circ$
বা, $2\angle R + 90^\circ + \angle R = 180^\circ$
বা, $3\angle R + = 180^\circ - 90^\circ$
বা, $3\angle R = 90^\circ$
বা, $\angle R = \frac{90^\circ}{3}$
$\therefore \angle R = 30^\circ$
$\therefore \angle P = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$ **(Ans.)**

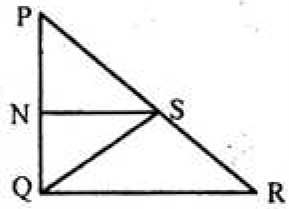
খ দেওয়া আছে, ΔPQR এ $\angle Q$ = একসমকোণ এবং QR ও PQ এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N। P, M ও R, N যোগ করা হল। প্রমাণ করতে হবে যে, $4(PM^2 + RN^2) = 5PR^2$



প্রমাণ:
ধাপ — যথার্থতা
(১) ΔPQR এ $\angle Q$ = একসমকোণ হওয়ায় PR অতিভুজ
$\therefore PR^2 = PQ^2 + QR^2$ .... (i) [পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]
অনুরূপভাবে, ΔPQM এ
$PM^2 = PQ^2 + QM^2$
$= PQ^2 + \left(\frac{1}{2}QR\right)^2$ [M, QR এর মধ্যবিন্দু]
$= PQ^2 + \frac{1}{4}QR^2$
$\therefore 4PM^2 = 4PQ^2 + QR^2$ .... (ii)
(২) ΔRQN এ
$RN^2 = QN^2 + QR^2$
$= \left(\frac{1}{2}PQ\right)^2 + QR^2$ [N, PQ এর মধ্যবিন্দু]
$= \frac{1}{4}PQ^2 + QR^2$
$\therefore 4RN^2 = PQ^2 + 4QR^2$ .... (iii)

(৩) [(ii) + (iii)] হতে পাই,
$4PM^2 + 4RN^2 = 5PQ^2 + 5QR^2$
বা, $4(PM^2 + RN^2) = 5(PQ^2 + QR^2)$
বা, $4(PM^2 + RN^2) = 5PR^2$ [(i) নং হতে]
$\therefore 4(PM^2 + RN^2) = 5PR^2$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, ΔPQR এ $\angle Q$ = এক সমকোণ। PQ ও PR এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে N ও S। Q, S যোগ করি।
প্রমাণ করতে হবে যে, $QS = \frac{1}{2} PR$



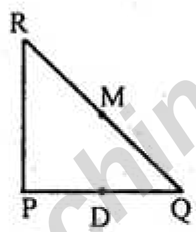
অঙ্কন : N, S যোগ করি।
প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔPQR এ PQ ও PR এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে N ও S $\therefore NS \parallel QR$ $\therefore \angle PNS = \angle NQR$	 [অনুরূপকোণ]
(২) ΔPNS এবং ΔQNS এ $PN = QN$ $NS = NS$ এবং $\angle PNS = \angle SNQ$ $\therefore \Delta PNS \cong \Delta QNS$ $\therefore PS = QS$	 [N, PQ এর মধ্যবিন্দু] [সাধারন বাহু] [প্রত্যেকে এক সমকোণ]
(৩) কিন্তু $PS = \frac{1}{2} PR$ $\therefore QS = \frac{1}{2} PR$ **(প্রমাণিত)**	[S, PR এর মধ্যবিন্দু]

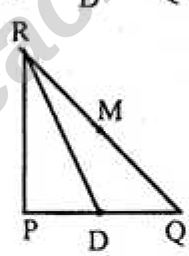
প্রশ্ন ▶ ২৫ PQR সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ QR এর উপর M যে কোনো বিন্দু। D, PQ এর উপর একটি বিন্দু। *[নোয়াখালী জিলা স্কুল]*
ক. তথ্যগুলো চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ কর।
খ. দেখাও যে, $RQ^2 + PD^2 = PQ^2 + RD^2$
গ. প্রমাণ কর যে, $MR^2 + MQ^2 = 2PM^2$

২৫ নং প্রশ্নের সমাধান

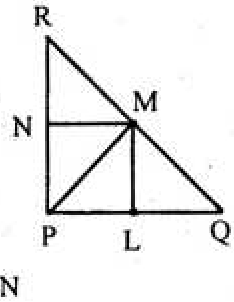
ক চিত্রে PQR সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। QR অতিভুজ এর উপর M যে কোন বিন্দু এবং D, PQ এর উপর যেকোন বিন্দু।



খ **অঙ্কন:** R, D যোগ করি।
প্রমাণ : ΔPQR সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,
$RQ^2 = PR^2 + PQ^2$ .... (i)
ΔPRD সমকোণী ত্রিভুজ হতে,
$RD^2 = PR^2 + PD^2$
বা, $RD^2 - PD^2 = PR^2$
এখন, (i) নং হতে $RQ^2 = PR^2 + PQ^2$
$RQ^2 = RD^2 - PD^2 + PQ^2$
বা, $RQ^2 + PD^2 = RD^2 + PQ^2$ **(দেখানো হলো)**
$\therefore RQ^2 + PD^2 = PQ^2 + RD^2$



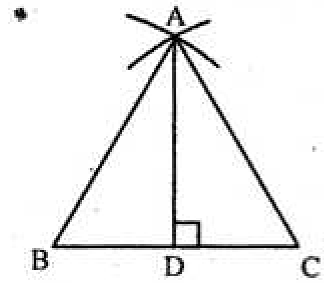
গ **অঙ্কন:** $ML \perp PQ$ এবং $MN \perp PR$ আঁকি।
P, M যোগ করি।
প্রমাণ: ΔPQR এ $PQ = PR$, $\angle RPQ = 90°$
$\therefore$ $\angle PQM = \angle PRM = 45°$
এখন ΔMLQ এ $\angle LQM = 45°$, $\angle MLQ = 90°$
$\therefore$ $\angle LMQ = 45°$
$\therefore$ $LQ = ML$
$\therefore$ $MQ^2 = LQ^2 + ML^2$
$= ML^2 + ML^2$
$= 2ML^2$
অনুরূপভাবে, ΔMNR এ $MR^2 = 2MN^2$
এখন PLMN চতুর্ভুজে $\angle NPL = \angle PLM = \angle LMN = \angle MNP = 90°$
$\therefore$ PLMN একটি আয়ত বা বর্গ
$\therefore$ $PL = MN$
$\therefore$ $MR^2 + MQ^2 = 2ML^2 + 2MN^2$
$= 2(ML^2 + MN^2)$
$= 2(ML^2 + PL^2)$
$= 2PM^2$ **(প্রমাণিত)**



প্রশ্ন ▶ ২৬ ΔABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ, $AD \perp BC$. *[ফেনী সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়]*
ক. উদ্দীপকের আলোকে চিত্রটি আঁক।
খ. প্রমাণ কর যে, $3AB^2 = 4AD^2$
গ. যদি উক্ত ত্রিভুজের AB ও AC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X ও Y হয় তবে দেখাও যে, $\Delta AXY = \frac{1}{4} \Delta ABC$.

২৬ নং প্রশ্নের সমাধান

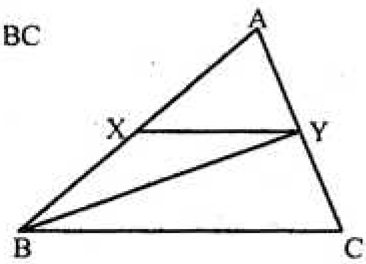
ক



চিত্রে, ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। $AD \perp BC$

খ ২(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ **বিশেষ নির্বচন:** মনে করি ΔABC-এর AB এবং AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X এবং Y. X,Y যোগ করি।
প্রমাণ করতে হবে যে,



Δ-ক্ষেত্র AXY এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{4}$(Δ-ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল)
অঙ্কন: B, Y যোগ করি।
প্রমাণ :

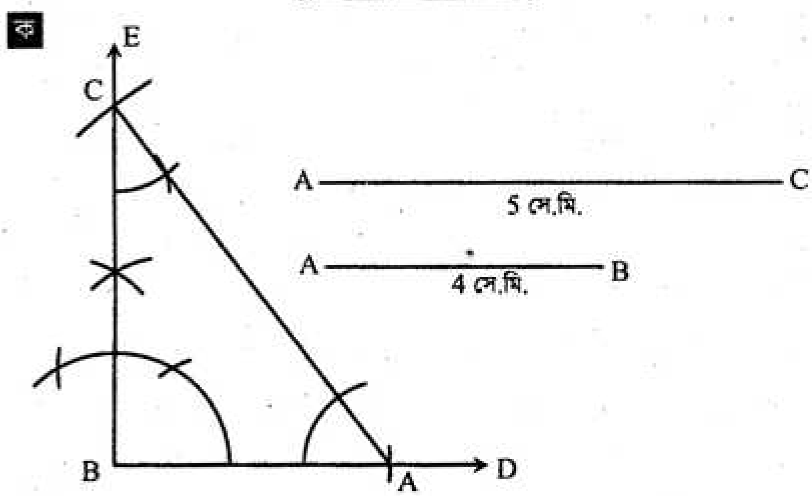
ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔABY-এ XY, AB এর ওপর মধ্যমা। Δ-ক্ষেত্র $AXY = \frac{1}{2}$(Δ-ক্ষেত্র ABY) [$\because$ XY মধ্যমা Δ-ক্ষেত্র ABY-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে] $\therefore$ Δ-ক্ষেত্র ABY = 2(Δ-ক্ষেত্র AXY)	
(২) ΔABC- এ BY, AC-এর ওপর মধ্যমা। $\therefore$ Δ-ক্ষেত্র $ABY = \frac{1}{2}$(Δ-ক্ষেত্র ABC) [একই কারণে] বা, 2(Δ-ক্ষেত্র AXY) $= \frac{1}{2}$(Δ-ক্ষেত্র ABC) [ধাপ (১)হতে] $\therefore$ Δ-ক্ষেত্র $AXY = \frac{1}{2}\{\frac{1}{2}$($\Delta$-ক্ষেত্র ABC)$\} = \frac{1}{4}$ (Δ-ক্ষেত্র ABC)	

অর্থাৎ, Δ-ক্ষেত্র AXY এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{4}$ (Δ-ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল)
(দেখানো হলো)

প্রশ্ন ▶ ২৭ ΔABC এ $\angle B = 90°$, AB = 4cm, AC = 5cm *[ডা. খাস্তগীর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম]*
ক. অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণসহ ΔABC অঙ্কন কর।
খ. D, BC বাহুর মধ্যবিন্দু হলে দেখাও যে, $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$
গ. অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ সহ ΔABC এর পরিবৃত্ত অঙ্কন করে উক্ত বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

২৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক

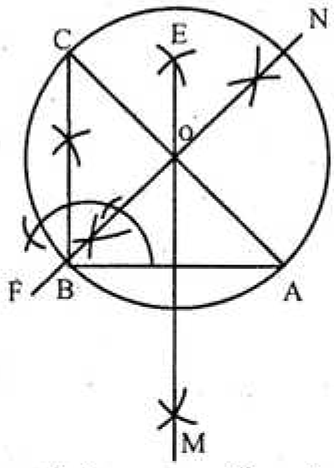


ΔABC এর $\angle B = 90°$, AB = 4 সে.মি., AC = 5 সে.মি. দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ: (১) যেকোনো রশ্মি BD থেকে BA = 4 সে.মি. কেটে নিই। B বিন্দুতে $\angle ABE = 90°$ আঁকি।
(২) A কে কেন্দ্র করে AC = 5 সে.মি. এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে এমন একটি বৃত্তচাপ আঁকি যা BE রেখাকে C বিন্দুতে ছেদ করে।
(৩) A, C যোগ করি। তাহলে ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

খ ২০(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ



ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ। এর পরিবৃত্ত আঁকতে হবে। অর্থাৎ এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে, যা ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু A, B, C দিয়ে যায়।

অঙ্কন: (১) AB ও AC রেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে EM ও FN আঁকি। তারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে যা AC এর উপর অবস্থিত।
(২) এখন O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। তাহলে বৃত্তটি A, B, C বিন্দুগামী হবে এবং এই বৃত্তটিই ΔABC এর নির্ণেয় পরিবৃত্ত।

২য় অংশ: চিত্র হতে পাই,
O বিন্দু AC রেখার উপর অবস্থিত।
আবার, OA = OC [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
দেওয়া আছে, AC = 5 সে.মি.
বা, OA + OC = 5 সে.মি.
বা, 2OA = 5 সে.মি.
বা, OA = 2.5 সে.মি.
$\therefore$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ 2.5 সে.মি. **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৮ *[ফৌজদারহাট ক্যাডেট কলেজ, চট্টগ্রাম]*

ক. একটি চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ আঁক। (শুধুমাত্র অঙ্কন)

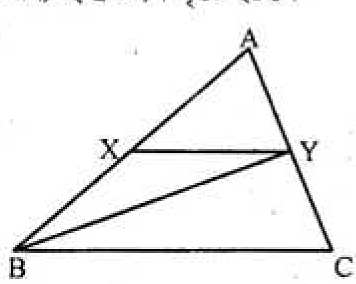
খ. ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X ও Y প্রমাণ কর যে, Δ ক্ষেত্র AXY এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{4}$ (Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল)

গ. ABC একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। BC এর অতিভুজ এবং P, BC এর ওপর যেকোনো বিন্দু। দেখাও যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$

২৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১৫ সম্পাদ্য-২ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৪৬।

খ বিশেষ নির্বচন: মনে করি ΔABC-এর AB এবং AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X এবং Y. X,Y যোগ করি।
প্রমাণ করতে হবে যে,
Δ-ক্ষেত্র AXY এর ক্ষেত্রফল
$= \frac{1}{4}$ (Δ-ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল)



অঙ্কন: B, Y যোগ করি।

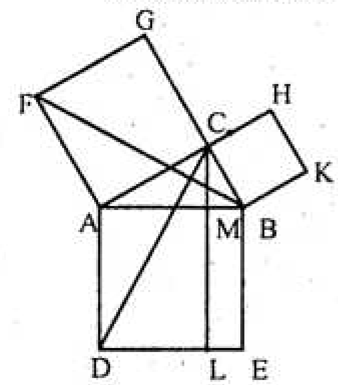
প্রমাণ : ধাপ   **যথার্থতা**

(১) ΔABY-এ XY, AB এর ওপর মধ্যমা।
Δ-ক্ষেত্র AXY $= \frac{1}{2}$ (Δ-ক্ষেত্র ABY) [$\because$ XY মধ্যমা Δ-ক্ষেত্র ABY-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
$\therefore$ Δ-ক্ষেত্র ABY = 2(Δ-ক্ষেত্র AXY)
(২) ΔABC-এ BY, AC-এর ওপর মধ্যমা।
$\therefore$ Δ-ক্ষেত্র ABY $= \frac{1}{2}$ (Δ-ক্ষেত্র ABC) [একই কারণে]

বা, 2(Δ-ক্ষেত্র AXY) $= \frac{1}{2}$ (Δ-ক্ষেত্র ABC) [ধাপ (১)হতে]
$\therefore$ Δ-ক্ষেত্র AXY $= \frac{1}{2}\{\frac{1}{2}$ (Δ-ক্ষেত্র ABC)$\} = \frac{1}{4}$ (Δ-ক্ষেত্র ABC)
অর্থাৎ, Δ-ক্ষেত্র AXY এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{4}$ (Δ-ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল)
(প্রমাণিত)

গ ৬(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ২৯ চিত্রটি লক্ষ্য কর এবং প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:
[বাংলাদেশ মহিলা সমিতি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয় ও কলেজ, চট্টগ্রাম]



ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার AC = BC এবং $\angle C = 90°$

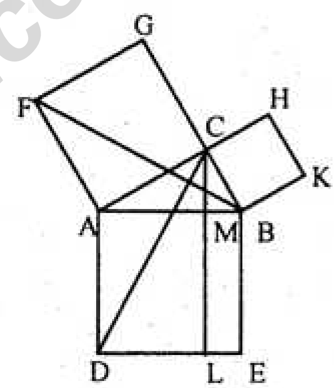
ক. চিত্রটি অঙ্কন করে চিহ্নিত কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = BC^2 + AC^2$

গ. AB এর উপর একটি বিন্দু P হলে প্রমাণ কর যে, $AP^2 + BP^2 = 2CP^2$

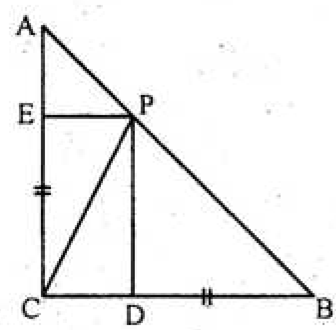
২৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



খ মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১৫ এর উপপাদ্য-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৪৫।

গ



মনে করি, সমদ্বিবাহু সমকোণী ΔCAB-এর CA = CB এবং অতিভুজ AB, P, AB এর ওপর যেকোনো বিন্দু। P, C যোগ করি।
প্রমাণ করতে হবে যে, $AP^2 + BP^2 = 2CP^2$.

অঙ্কন: P বিন্দু থেকে CA এবং BC বাহুর ওপর যথাক্রমে PE এবং PD লম্ব টানি।

প্রমাণ: ΔCAB-এর, $\angle C = 90°$
এবং CB = CA হওয়ায়, $\angle A = \angle B = 45°$
এখন, ΔPDB-এর, $\angle D = 90°$ [$\because PD \perp CB$]
সুতরাং, $\angle DPB = \angle DBP = 45°$
$\therefore$ BD = PD
অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়, PAE সমকোণী ত্রিভুজে, PE = AE
এখন, PDB সমকোণী ত্রিভুজে PB অতিভুজ হওয়ায়
$PB^2 = PD^2 + BD^2 = PD^2 + PD^2$ [$\because$ PD = BD]
$\therefore$ $PB^2 = 2PD^2$ ... ... (i)
আবার, PAE সমকোণী ত্রিভুজে PA অতিভুজ হওয়ায়,
$PA^2 = AE^2 + PE^2$
$= PE^2 + PE^2$ [$\because$ AE = PE]
$\therefore$ $PA^2 = 2PE^2$ ... ... (ii)
এখন, (i) এবং (ii) নং যোগ করে পাই,
$PB^2 + PA^2 = 2PD^2 + 2PE^2 = 2(PD^2 + PE^2)$
আবার, $\angle E = \angle C = \angle D$ = এক সমকোণ হওয়ায় CDPE একটি আয়ত।

∴ $PE = CD$ [∵ আয়তক্ষেত্রের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান]

∴ $PB^2 + PA^2 = 2(PD^2 + CD^2)$ ... ... (iii)

CDP সমকোণী ত্রিভুজে PC অতিভুজ হওয়ায়,

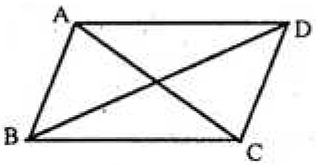
$PC^2 = PD^2 + CD^2$

তাহলে, (iii) নং হতে পাই,

$PB^2 + PA^2 = 2PC^2$

∴ $AP^2 + BP^2 = 2CP^2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৩০



[ব্লু-বার্ড স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট]

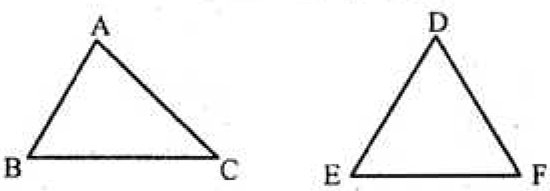
ক. দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী কখন হয়? চিত্র এঁকে বুঝিয়ে দাও।

খ. চিত্রে ΔABC ও ΔDBC একই ভূমি BC এর উপর এবং $BC \parallel AD$ হলে, প্রমাণ কর যে, Δ ক্ষেত্র $ABC = \Delta$ ক্ষেত্র DBC.

গ. যদি ABC ত্রিভুজটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং $AP \perp BC$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $4AP^2 = 3AB^2$.

৩০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



দুইটি ত্রিভুজ ΔABC ও ΔDEF সদৃশকোণী হবে যদি

(১) ত্রিভুজদ্বয়ের অনুরূপ কোণগুলো সমান হয়

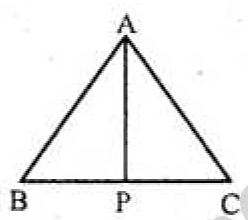
(২) অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান হয়।

খ মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১৫ এর উপপাদ্য-১নং দ্রষ্টব্য।

গ দেওয়া আছে, ΔABC-সমবাহু

অর্থাৎ $AB = BC = CA$

এবং AP, BC এর ওপর লম্ব।



প্রমাণ করতে হবে যে, $4AP^2 = 3AB^2$

প্রমাণ: $AP \perp BC$ [দেওয়া আছে]

∴ $\angle APB = \angle APC = 90°$.

এখন, সমকোণী ΔABP এবং সমকোণী ΔACP-এ

অতিভুজ AB = অতিভুজ AC [∵ ABC সমবাহু ত্রিভুজ]

এবং AP সাধারণ বাহু।

∴ $\Delta ABP \cong \Delta ACP$ [∵ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অতিভুজ এবং অপর একটি বাহু সমান]

সুতরাং, $BP = CP$

∴ $BC = BP + PC = 2BP$

আবার, সমকোণী ΔABP-এ $\angle APB = 90°$

এবং অতিভুজ = AB.

∴ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 = AP^2 + BP^2$

বা, $AP^2 = AB^2 - BP^2$

বা, $4AP^2 = 4AB^2 - 4BP^2$ [উভয়পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে]

বা, $4AP^2 = 4AB^2 - (2BP)^2$

বা, $4AP^2 = 4AB^2 - BC^2$ [∵ $BC = 2BP$]

বা, $4AP^2 = 4AB^2 - AB^2$ [∵ $AB = BC$]

∴ $4AP^2 = 3AB^2$. **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৩১ ΔABC এ $AB = BC = AC$ এবং D, E এবং F যথাক্রমে AB, AC এবং BC এর মধ্যবিন্দু। *[সিলেট সরকারি পাইলট উচ্চ বিদ্যালয়]*

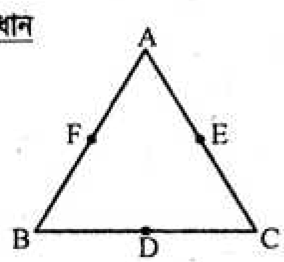
ক. প্রদত্ত তথ্যের ভিত্তিতে সংক্ষিপ্ত বিবরণসহ চিত্র আঁক।

খ. প্রমাণ কর $DE = DF = EF$

গ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর, ΔABC এর যে কোনো শীর্ষ থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের বর্গের চারগুণ উহার যে কোনো বাহুর বর্গের তিনগুণের সমান।

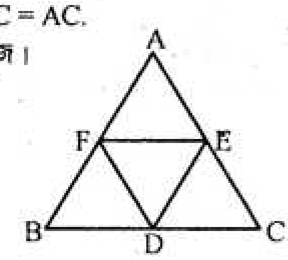
৩১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ΔABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ যার $AB = BC = CA$. BC, CA ও AB এর মধ্যবিন্দুগুলো যথাক্রমে D, E ও F.



খ ΔABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ অর্থাৎ $AB = BC = AC$.

প্রমাণ করতে হবে যে, ΔDEF একটি সমবাহু ত্রিভুজ।



প্রমাণ : 'খ' হতে আমরা পাই, $FE = \frac{1}{2}BC$.

অনুরূপে, $DE = \frac{1}{2}AB$ এবং $FD = \frac{1}{2}AC$.

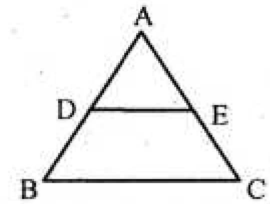
যেহেতু $AB = BC = AC$

বা, $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AC$

∴ $DE = FE = FD$ **(প্রমাণিত)**

গ ২(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৩২



এখানে D এবং E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু। *[স্কলারস হোম, সিলেট]*

ক. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ কাকে বলে?

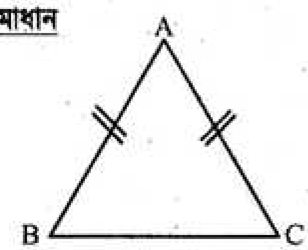
খ. প্রমাণ কর যে, $DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC$.

গ. প্রমাণ কর যে, ΔADE এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{4}(\Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল)।

৩২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ:** যে ত্রিভুজের দুটি বাহু সমান তাকে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ বলে।

চিত্রে ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যেখানে $AB = AC$.



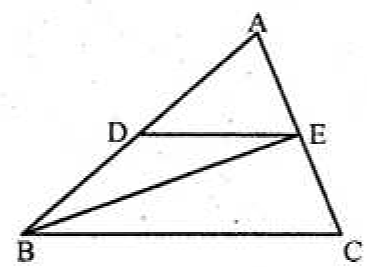
খ মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৬.৩ এর উপপাদ্য-১৫ দ্রষ্টব্য।

গ মনে করি ΔABC-এর AB এবং AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D এবং E. D,E যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে,

Δ-ক্ষেত্র ADE এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{4}(\Delta$-ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল)



অঙ্কন: B, E যোগ করি।

প্রমাণ: Δ ABE-এ DE, AB এর ওপর মধ্যমা।

Δ-ক্ষেত্র ADE $= \frac{1}{2}(\Delta$-ক্ষেত্র ABE)

[∵ DE মধ্যমা Δ-ক্ষেত্র ABE-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

আবার, ΔABC- এ BE, AC-এর ওপর মধ্যমা।

∴ Δ-ক্ষেত্র ABE $= \frac{1}{2}(\Delta$-ক্ষেত্র ABC) [একই কারণে]

∴ Δ-ক্ষেত্র ADE $= \frac{1}{2}\{\frac{1}{2}(\Delta$-ক্ষেত্র ABC)$\} = \frac{1}{4}$ (Δ-ক্ষেত্র ABC)

অর্থাৎ, Δ-ক্ষেত্র ADE এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{4}$ (Δ-ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল)

(প্রমাণিত)

প্রশ্ন ▶৩৩ ABC একটি ত্রিভুজ। *[স্কলারস হোম, সিলেট]*

ক. ত্রিভুজের পরিসীমা কাকে বলে?

খ. ABC ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন কর। [অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক]

গ. একটি সামান্তরিক অংকন কর যার একটি কোণ 45° এবং ক্ষেত্রফল, ΔABC এর ক্ষেত্রফলের সমান। [অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক]

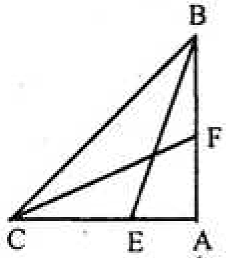
৩৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **ত্রিভুজের পরিসীমা:** ত্রিভুজের তিন বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টিকে ঐ ত্রিভুজের পরিসীমা বলে।

খ মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.৫ এর সম্পাদ্য-৫ দ্রষ্টব্য।

গ মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১৫ এর সম্পাদ্য-১ দ্রষ্টব্য।
[বি.দ্র. $\angle x = 45°$ লিখতে হবে।]

প্রশ্ন ▶ ৩৪



[শাহজালাল জামেয়া ইসলামিয়া স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট]

ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle A = 1$ সমকোণ, BE ও CF দুটি মধ্যমা।

ক. পীথাগোরাসের উপপাদ্যটি লেখ।

খ. পীথাগোরাসের বিপরীত উপপাদ্যটি প্রমাণ কর।

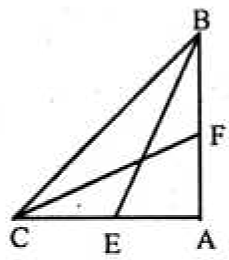
গ. প্রমাণ কর যে, $4(BE^2 + CF^2) = 5BC^2$

৩৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **পীথাগোরাসের উপপাদ্য :** সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

খ ১০(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle A = 1$ সমকোণ, BE ও CF দুটি মধ্যমা।
প্রমাণ করতে হবে যে, $4(BE^2 + CF^2) = 5\,BC^2$



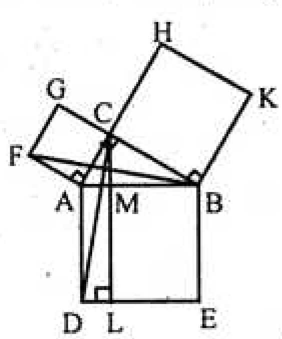
ধাপ-১
সমকোণী ΔABC-এ
$BC^2 = AB^2 + AC^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]
$= (2AF)^2 + (2AE)^2$ [$\because AF = BF, CE = AE$]
$= 4AF^2 + 4AE^2$
$= 4(AF^2 + AE^2)$
$\therefore AF^2 + AE^2 = \frac{1}{4}BC^2$ ....(i)

ধাপ-২
সমকোণী ΔABE-এ
$BE^2 = AB^2 + AE^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]
বা $AB^2 = BE^2 - AE^2$ ....(ii)

ধাপ : ৩ সমকোণী ΔACF-এ
$CF^2 = AC^2 + AF^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]
বা, $AC^2 = CF^2 - AF^2$ ....(iii)

ধাপ-৪
$BC^2 = AB^2 + AC^2$
$= BE^2 - AE^2 + CF^2 - AF^2$ [(ii) নং ও (iii) নং এর সাহায্যে]
$= BE^2 + CF^2 - (AE^2 + AF^2)$
$= BE^2 + CF^2 - \frac{1}{4}BC^2$
বা, $BC^2 = \frac{4BE^2 + 4CF^2 - BC^2}{4}$
বা, $4BC^2 = 4BE^2 + 4CF^2 - BC^2$
বা, $4BC^2 + BC^2 = 4(BE^2 + CF^2)$
$\therefore 4(BE^2 + CF^2) = 5BC^2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৩৫ নিচের চিত্রটি লক্ষ্য কর এবং প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :



[হবিগঞ্জ সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, হবিগঞ্জ]

ক. চিত্রটি অঙ্কন করে সংক্ষিপ্ত বর্ণনা দাও।

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = BC^2 + AC^2$

গ. ΔABC এ $AC = BC$, $\angle C = 90°$ এবং P, AB এর উপর যে কোনো বিন্দু হলে, প্রমাণ কর যে, $PA^2 + PB^2 = 2PC^2$.

৩৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবইয়ের অনু - ১৫, উপপাদ্য -৩ এর চিত্র দ্রষ্টব্য।

বর্ণনা : চিত্রে ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ। এর অতিভুজ AB এর উপর অঙ্কিত ABED একটি বর্গক্ষেত্র এবং অপর দুই বাহু AC ও BC এর উপর অঙ্কিত যথাক্রমে ACGF ও BCHK দুইটি বর্গক্ষেত্র। C থেকে DE বাহুর উপর CL লম্ব যা AB ও DE বাহুকে যথাক্রমে M ও L বিন্দুতে ছেদ করে। C, D ও F, B যোগ করা হয়েছে।

খ মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবইয়ের অনু -১৫, উপপাদ্য -৩ এর "প্রমাণ অংশ" দ্রষ্টব্য।

গ ৬(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৩৬ নিচের তথ্যের আলোকে প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

PQR সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ QR এর উপর M যে কোনো বিন্দু। D, PQ এর উপর একটি বিন্দু। [বি.কে.জি.সি সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, হবিগঞ্জ]

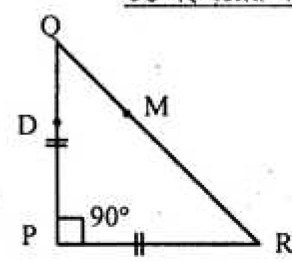
ক. তথ্যগুলো চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. দেখাও যে, $RQ^2 + PD^2 = PQ^2 + RD^2$

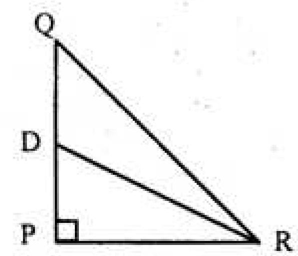
গ. প্রমাণ কর যে, $MR^2 + MQ^2 = 2PM^2$

৩৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



খ



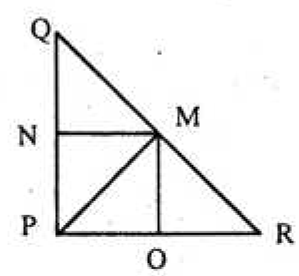
বিশেষ নির্বচন: মনেকরি, PQR একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। যেখানে, $\angle QPR = 90°$ এবং $PQ = PR$ D, PQ এর উপর যে কোন একটি বিন্দু।
প্রমাণ করতে হবে যে, $RQ^2 + PD^2 = PQ^2 + RD^2$

অঙ্কন: R, D যোগ করি।

প্রমাণ: ধাপ:	**যথার্থতা:**
(১) ΔPDR সমকোণী ত্রিভুজে $RD^2 = PR^2 + PD^2$ $\therefore RD^2 - PD^2 = PR^2$	[পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]
(২) ΔPQR সমকোণী ত্রিভুজে $QR^2 = PQ^2 + PR^2$ $\therefore QR^2 - PR^2 = PQ^2$	[ঐ]
(৩) এখন যেহেতু, $PQ = PR$	[দেওয়া আছে]
বা, $PQ^2 = PR^2$	[বর্গ করে]
বা, $QR^2 - PR^2 = RD^2 - PD^2$	
বা, $QR^2 + PD^2 = RD^2 + PR^2$	
$\therefore RQ^2 + PD^2 = PQ^2 + RD^2$	[$\because PQ = PR$]

(প্রমাণিত)

গ **বিশেষ নির্বচন:** মনেকরি, PQR একটি সমকোণী, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার বাহু PQ = বাহু PR এবং অতিভুজ QR এবং M, QR এর উপর যে কোন একটি বিন্দু। P, M যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $MR^2 + MQ^2 = 2PM^2$

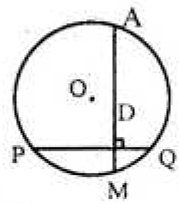


অঙ্কন: M বিন্দু হতে PR ও PQ এর উপর যথাক্রমে MO ও MN লম্ব আঁকি।

প্রমাণ: ধাপ:	**যথার্থতা:**
(১) ΔPQR এ $\angle P = 90°$ এবং $\angle R = \angle Q = 45°$	[ত্রিভুজের দুই বাহু সমান হলে বিপরীত কোণ সমান]
(২) এখন ΔMOR এ $\angle O = 90°$ $\angle OMR = \angle MRO = 45°$ $\therefore OR = OM$	[ত্রিভুজের দুই কোণ সমান হলে বিপরীত কোণ সমান]
অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়, ΔQMN এ $QN = QM$	
(৩) MOR সমকোণী ত্রিভুজে MR অতিভুজ হওয়ায়, $MR^2 = OM^2 + OR^2$ $= OM^2 + OM^2$ $= 2OM^2 +$ .... (i)	[$\because OM = OR$]
(৪) QNM সমকোণী ত্রিভুজে QM অতিভুজ হওয়ায়,	[$\because QN = NM$]
$QM^2 = QN^2 + NM^2$ $= NM^2 + NM^2$ $= 2NM^2$ $= 2MN^2$ .... (ii)	[$\because MN = NM$]

(৫) (i) + (ii) ⇒ $MR^2 + QM^2 = 2OM^2 + 2MN^2 = 2(OM^2 + MN^2)$ [$\angle N = \angle P = \angle O = 90°$]
আবার, POMN একটি আয়ত
$\therefore MN = OP$ [∵ আয়তক্ষেত্রের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান]
$\therefore MR^2 + QM^2 = 2(OM^2 + OP^2)$ .... (iii)
(৬) আবার, POM সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ = PM [পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]
$\therefore OP^2 + OM^2 = PM^2$
(৭) (iii) নং হতে পাই,
$MR^2 + QM^2 = 2PM^2$
$\therefore MR^2 + MQ^2 = 2PM^2$ (প্রমাণিত) [∵ QM = MQ]

প্রশ্ন ▶৩৭ চিত্রে O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AM ও PQ জ্যাদ্বয় বৃত্তের অভ্যন্তরে D বিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে।



[বি এ এফ শাহীন কলেজ শমশেরনগর, মৌলভীবাজার]

ক. বৃত্তস্থ কোণ ও কেন্দ্রস্থ কোণের সংজ্ঞা দাও।
খ. দেখাও যে, $\angle AOP + \angle MOQ = 2$ সমকোণ।
গ. ΔPAQ তে সূক্ষ্মকোণ $\angle P$ এবং AD, PQ এর উপর লম্ব প্রমাণ কর যে, $AQ^2 = AP^2 + PQ^2 - 2PQ.PD$.

৩৭ নং প্রশ্নের সমাধান

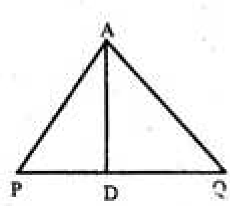
ক **বৃত্তস্থ কোণ:** একটি কোণের শীর্ষবিন্দু কোনো বৃত্তের একটি বিন্দু হলে এবং কোণটির প্রত্যেক বাহুতে শীর্ষবিন্দু ছাড়াও বৃত্তের একটি বিন্দু থাকলে কোণটিকে একটি বৃত্তস্থ কোণ বলে।
কেন্দ্রস্থ কোণ: একটি কোণের শীর্ষবিন্দু কোনো বৃত্তের কেন্দ্রে অবস্থিত হলে কোণটিকে ঐ বৃত্তের কেন্দ্রস্থ কোণ বলে।

খ **বিশেষ নির্বচন:** O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AM ও PQ জ্যা দুটি বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত D বিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে। P, O; A, O যোগ করায় $\angle AOP$ কোণ উৎপন্ন হয়। আবার, M, O এবং O, Q যোগ করায় $\angle MOQ$ কোণ উৎপন্ন হয়।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOP + \angle MOQ = 2$ সমকোণ।
অঙ্কন: M, Q এবং A, Q যোগ করি।

প্রমাণ: ধাপ — যথার্থতা
(১) ΔDMQ-এ $\angle MDQ = 1$ সমকোণ [অঙ্কন অনুসারে]
$\therefore \angle DMQ + \angle DQM = 1$ সমকোণ [সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি 1 সমকোণের সমান]
বা, $\angle AMQ + \angle PQM = 1$ সমকোণ [∵ $\angle DMQ = \angle AMQ$ এবং $\angle DQM = \angle PQM$]
(২) AP চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle AQP$ এবং কেন্দ্রস্থ $\angle AOP$
$\therefore \angle AOP = 2\angle AQP$ [একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]
(৩) আবার, MQ চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle MAQ$ এবং কেন্দ্রস্থ $\angle MOQ$
$\therefore \angle MOQ = 2\angle MAQ$ [একই কারনে]
(৪) এখন ΔAMQ- এ
$\angle AQM + \angle AMQ + \angle MAQ =$ দুই সমকোণ [ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ]
বা, $\angle AQP + \angle PQM + \angle AMQ + \angle MAQ =$ দুই সমকোণ
বা, $\angle AMQ + \angle PQM + \angle AQP + \angle MAQ =$ দুই সমকোণ
বা, 1 সমকোণ + $\angle AQP + \angle MAQ$ = দুই সমকোণ
$\therefore \angle AQP + \angle MAQ =$ এক সমকোণ
বা, $2\angle AQP + 2\angle MAQ = 2 \times$ এক সমকোণ [2 দ্বারা গুণ করে]
বা, $\angle AQP + \angle MOQ =$ দুই সমকোণ (প্রমাণিত)

গ **বিশেষ নির্বচন:** দেওয়া আছে, ΔPAQ এর $\angle P$ সূক্ষ্মকোণ। AD, PQ এর উপর লম্ব। প্রমাণ করতে হবে যে, $AQ^2 = AP^2 + PQ^2 - 2PQ.PD$.

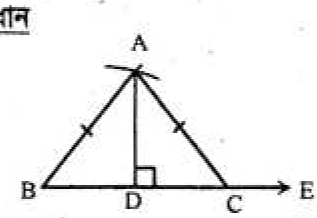


প্রমাণ: ধাপ — যথার্থতা
(১) ΔAPD এ $\angle ADP$ = এক সমকোণ এবং অতিভুজ AP
$\therefore AP^2 = AD^2 + PD^2$ .... (i)
(২) ΔAQD এ $\angle ADQ$ = এক সমকোণ, অতিভুজ AQ
$\therefore AQ^2 = AD^2 + DQ^2$ .... (ii)
$= AD^2 + (PQ - PD)^2$ [∵ PQ = PD + DQ ∵ DQ = PQ − PD]
$= AD^2 + PQ^2 - 2.PQ.PD + PD^2$
$= (AD^2 + PD^2) + PQ^2 - 2PQ.PD$ [ধাপ-১ থেকে প্রাপ্ত]
$= AP^2 + PQ^2 - 2PQ.PD$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ▶৩৮ ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং $AD \perp BC$.
ক. উপযুক্ত বর্ণনাসহ সঠিক চিত্রটি আঁক। *[পুলিশ লাইন মাধ্যমিক বিদ্যালয়, যশোর]*
খ. প্রমাণ কর যে, $3AB^2 = 4AD^2$
গ. দেখাও যে, $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$

৩৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক যেকোনো রশ্মি BE থেকে যেকোনো দৈর্ঘ্য x এর সমান করে BC কাটি। এখন B ও C কে কেন্দ্র করে BC এর একই পাশে x এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। এরা পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে। A, B ও A, C যোগ করি। তাহলে ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত হলো। এখন BC এর উপর AD লম্ব আঁকি।

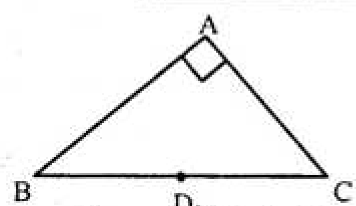


খ ২(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।
গ ২০(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৩৯ ΔABC-এ $\angle A$ = এক সমকোণ। D অতিভুজ BC এর মধ্যবিন্দু। *[যশোর জিলা স্কুল, যশোর]*
ক. সংক্ষিপ্ত বিবরণ সহ ত্রিভুজটি আঁক এবং চিহ্নিত কর।
খ. প্রমাণ কর যে, $AD = \frac{1}{2}BC$
গ. যদি AB = AC হয় এবং অতিভুজ BC এর উপরস্থ একটি বিন্দু P হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$

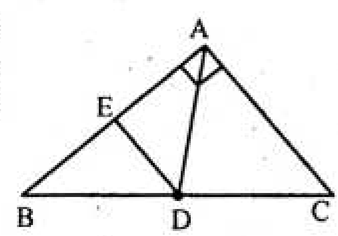
৩৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



প্রদত্ত তথ্য অনুযায়ী ΔABC- ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

খ **বিশেষ নির্বচন:** মনে করি, ΔABC-এর $\angle A$ = এক সমকোণ এবং D, BC এর মধ্যবিন্দু। A, D যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $AD = \frac{1}{2}BC$.



অঙ্কন: AB এর মধ্যবিন্দু E নিই। D, E যোগ করি।

প্রমাণ: ধাপ — যথার্থতা
(১) ΔABC-এ E এবং D যথাক্রমে AB ও BC এর মধ্যবিন্দু।
$\therefore DE \parallel AC$ [∵ ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল।]
$\therefore \angle BAC =$ অনুরূপ $\angle BED$ = এক সমকোণ।
(২) এখন, ΔAED ও ΔBED-এর মধ্যে
AE = BE [∵ E, AB এর মধ্যবিন্দু]
এবং $\angle AED$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle BED$ [∵ প্রত্যেকে সমকোণ]
এবং DE = DE [সাধারণ বাহু]
$\therefore \Delta AED \cong \Delta BED$
$\therefore AD = BD$
(৩) কিন্তু, $BD = \frac{1}{2}BC$
$\therefore AD = \frac{1}{2}BC$ (প্রমাণিত)

গ ৬(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৪০ ΔABC এ $\angle C$ সমকোণ এবং AB অতিভুজ।

[যশোর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, যশোর]

ক. পিথাগোরাসের উপপাদ্যটি বিবৃত কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = BC^2 + AC^2$

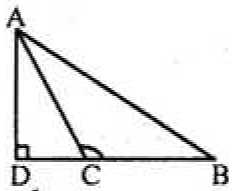
গ. ΔABC এর যদি $\angle C$ স্থূলকোণ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$

৪০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবইয়ের অধ্যায় ১৫ এর উপপাদ্য ৩নং দ্রষ্টব্য।

খ মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবইয়ের অধ্যায় ১৫ এর উপপাদ্য ৩নং দ্রষ্টব্য।

গ **বিশেষ নির্বচন:** মনে করি, ΔABC ত্রিভুজে $\angle C$ স্থূলকোণ। AD, BC এর বর্ধিতাংশের ওপর লম্ব অর্থাৎ $\angle ADB = 90°$। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC{\cdot}CD$.



প্রমাণ : ধাপ **যথার্থতা**

(১) ΔACD এ $\angle ADC$ = এক সমকোণ এবং অতিভুজ = AC.

সুতরাং, $AC^2 = AD^2 + CD^2$ ……… (i) [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

(২) ΔABD এ $\angle ADB$ = এক সমকোণ এবং অতিভুজ = AB.

(৩) সুতরাং, $AB^2 = AD^2 + BD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

$= AD^2 + (BC + CD)^2$ [$\because BD = BC + CD$]

$= AD^2 + BC^2 + 2BC{\cdot}CD + CD^2$

$= AD^2 + CD^2 + BC^2 + 2BC{\cdot}CD$

$= AC^2 + BC^2 + 2BC{\cdot}CD$ [(i) নং থেকে]

$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC{\cdot}CD$. **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৪১ ΔPQR এ PM, QN এবং RS মধ্যমাত্রয় I বিন্দু দিয়ে যায়।

[মিলিটারী কলেজিয়েট স্কুল, খুলনা]

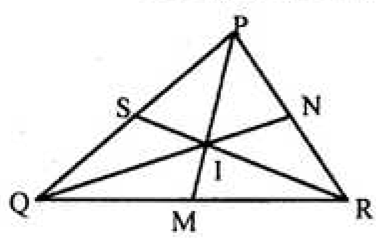
a. উদ্দীপকের তথ্যানুসারে চিত্রটি অঙ্কন কর।

b. প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + PR^2 = 2PM^2 + 2QM^2$

c. দেখাও যে, ΔPQR এর তিন বাহুর বর্গের সমষ্টি I বিন্দু হতে ত্রিভুজটির শীর্ষত্রয়ের দূরত্বের বর্গের সমষ্টির তিন গুণের সমান।

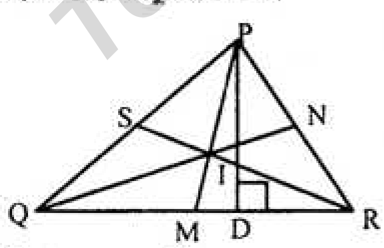
৪১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



চিত্রে, ΔPQR এ PM, QN ও RS মধ্যমাত্রয় I বিন্দু দিয়ে যায়।

খ ΔPQR-এ PM, QN ও RS মধ্যমাত্রয় I বিন্দুতে ছেদ করেছে। QR বাহুর উপর PD লম্ব আঁকি।



এখন ΔPQM-এ $\angle PMQ$ স্থূলকোণ

$\therefore PQ^2 = PM^2 + QM^2 + 2QM.DM$ ……………… (i)

[স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি হতে]

আবার, ΔPRM-এ $\angle PMR$ সূক্ষ্মকোণ

$\therefore PR^2 = PM^2 + RM^2 - 2RM.DM$ ………… (ii)

[সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি হতে]

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$PQ^2 + PR^2 = PM^2 + QM^2 + 2QM.DM + PM^2 + RM^2 - 2RM.DM$

$= 2PM^2 + 2QM^2 + 2QM.DM - 2.QM.DM$ [মধ্যমা বলে RM = QM]

$= 2(PM^2 + QM^2)$

$= 2PM^2 + 2QM^2$

সুতরাং $PQ^2 + PR^2 = 2(PM^2 + QM^2)$ সম্পর্কটি প্রতিষ্ঠিত হলো।

গ 'খ' হতে পাই

$PQ^2 + PR^2 = 2(PM^2 + QM^2)$ ………. (i)

অনুরূপভাবে, $PQ^2 + QR^2 = 2(QN^2 + RN^2)$ ……. (ii)

এবং $QR^2 + PR^2 = 2(RS^2 + QS^2)$ …….. (iii)

এখন সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$2PQ^2 + 2QR^2 + 2PR^2 = 2PM^2 + 2QM^2 + 2QN^2 + 2RN^2 + 2RS^2 + 2QS^2$

বা, $2(PQ^2 + QR^2 + PR^2) = 2(PM^2 + QN^2 + RS^2) + 2(QM^2 + RN^2 + QS^2)$

বা, $4(PQ^2 + QR^2 + PR^2) = 4(PM^2 + QN^2 + RS^2) + 4(QM^2 + RN^2 + QS^2)$

[উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]

বা, $4(PQ^2 + QR^2 + PR^2) = 4(PM^2 + QN^2 + RS^2) + (2QM)^2 + (2RN)^2 + (2QS)^2$

বা, $4(PQ^2 + QR^2 + PR^2) = 4(PM^2 + QN^2 + RS^2) + QR^2 + PR^2 + PQ^2$

[$\because$ M, N, S যথাক্রমে QR, RP এবং PQ এর মধ্যবিন্দু বলে, 2QM = QR, 2RN = PR এবং 2QS = PQ]

বা, $3(PQ^2 + QR^2 + PR^2) = 4(PM^2 + QN^2 + RS^2)$ …… (iv)

আমরা জানি, ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো সমপতিত বিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত হয়।

$\therefore \frac{PI}{IM} = \frac{2}{1}$

বা, $\frac{IM}{PI} = \frac{1}{2}$

বা, $\frac{IM + PI}{PI} = \frac{1+2}{2}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{PM}{PI} = \frac{3}{2}$

বা, $2PM = 3PI$

বা, $4PM^2 = 9PI^2$ [বর্গ করে]

অনুরূপভাবে $4QN^2 = 9QI^2$

এবং $4RS^2 = 9RI^2$

সুতরাং (iv) নং সমীকরণ থেকে পাই

$3(PQ^2 + QR^2 + PR^2) = 9PI^2 + 9QI^2 + 9RI^2$

$\therefore PQ^2 + QR^2 + PR^2 = 3(PI^2 + QI^2 + RI^2)$ [3 দ্বারা ভাগ করে]

(দেখানো হলো)

প্রশ্ন ▶ ৪২ PQR ত্রিভুজের $\angle P = 90°$

[খুলনা জিলা স্কুল, খুলনা]

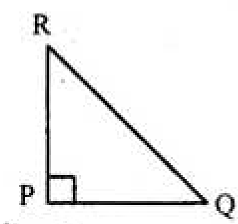
ক. পীথাগোরাসের উপপাদ্যটি লিখ।

খ. উপরের তথ্যের আলোকে প্রমাণ কর যে, $PR^2 + PQ^2 = QR^2$

গ. উদ্দীপকের ত্রিভুজটির বৃহত্তম বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে, দেখাও যে, $PR^2 + PQ^2 = 2(QD^2 + PD^2)$

৪২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **পীথাগোরাসের উপপাদ্য:** সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

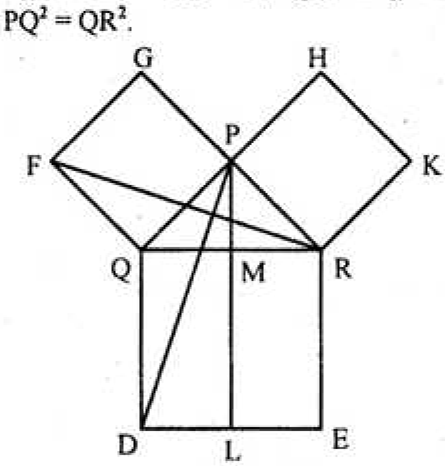


PQR সমকোণী ত্রিভুজে,

$PQ^2 + PR^2 = QR^2$ [পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

খ মনে করি, PQR সমকোণী ত্রিভুজের $\angle P = 90°$ এবং QR অতিভুজ। প্রমাণ করতে হবে যে, $PR^2 + PQ^2 = QR^2$.

অঙ্কন: QR, QP এবং RP বাহুর উপর যথাক্রমে QRED, QPGF এবং RPHK বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করি। P বিন্দু দিয়ে QD বা RE রেখার সমান্তরাল PL রেখা আঁকি। মনে করি, তা QR কে M বিন্দুতে এবং DE কে L বিন্দুতে ছেদ করে। P ও D এবং R ও F যোগ করি।



প্রমাণ : ধাপ **যথার্থতা**

(১) ΔPQD ও ΔFQR এ PQ = QF, QD = QR এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle PQD$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle RQF$ [$\angle RQD = \angle PQF$ = 1 সমকোণ]

অতএব, $\Delta PQD \cong \Delta FQR$ [বাহু কোণ-বাহু উপপাদ্য]

(২) ত্রিভুজক্ষেত্র PQD এবং আয়তক্ষেত্র QDLM একই ভূমি QD এর উপর এবং QD ও PL সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত। সুতরাং, আয়তক্ষেত্র QDLM = 2 (ত্রিভুজক্ষেত্র PQD)

ত্রিভুজক্ষেত্র RQF এবং বর্গক্ষেত্র QPGF

(৩) ত্রিভুজক্ষেত্র RQF এবং বর্গক্ষেত্র QPGF একই ভূমি QF এর উপর এবং QF ও RG সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত। সুতরাং, বর্গক্ষেত্র QPGF = 2 (ত্রিভুজক্ষেত্র FQR) = 2 (ত্রিভুজক্ষেত্র PQD) [ধাপ-১]

(৪) আয়তক্ষেত্র QDLM = বর্গক্ষেত্র QPGF

(৫) অনুরূপভাবে P, E ও Q, K যোগ করে প্রমাণ করা যায় যে, আয়তক্ষেত্র RELM = বর্গক্ষেত্র RPHK [ধাপ-১, ২, ৩ ও ৪]

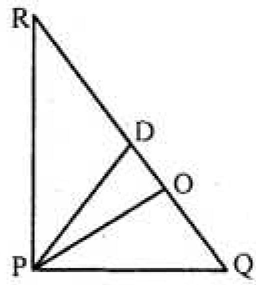
(৬) আয়তক্ষেত্র (QDLM + RELM) = বর্গক্ষেত্র QPGF + বর্গক্ষেত্র RPHK বা, বর্গক্ষেত্র QRED = বর্গক্ষেত্র QPGF + বর্গক্ষেত্র RPHK [(২) ও (৩) থেকে]

বা, $QR^2 = PQ^2 + PR^2$ [(৪) ও (৫) থেকে]

$\therefore$ $PQ^2 + PR^2 = QR^2$ **(প্রমাণিত)**

গ PQR ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহু হচ্ছে অতিভুজ QR, এর মধ্যবিন্দু D. P, D যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $PR^2 + PQ^2 = 2(QD^2 + PD^2)$

অঙ্কন: P বিন্দু থেকে QR এর উপর PO লম্ব আঁকি।



প্রমাণ : ধাপ — যথার্থতা

(১) ΔPOD-এ $\angle POD = 90°$ এবং অতিভুজ PD
$\therefore$ $PD^2 = OP^2 + OD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

(২) ΔOPR-এ $\angle POR = 90°$ এবং PR অতিভুজ
$\therefore$ $PR^2 = OP^2 + OR^2$
$= OP^2 + (OD + DR)^2$
$= OP^2 + OD^2 + 2.OD.DR + DR^2$
$= PD^2 + DR^2 + 2.OD.DR$ [ধাপ (১) থেকে]
$= PD^2 + QD^2 + 2.OD.QD$ [PD মধ্যমা]

(৩) আবার, ΔPOQ-এ $\angle POQ = 90°$ এবং PQ অতিভুজ
$\therefore$ $PQ^2 = OP^2 + OQ^2$
$= OP^2 + (QD - OD)^2$
$= OP^2 + QD^2 - 2QD.OD + OD^2$
$= OP^2 + OD^2 + QD^2 - 2QD.OD$
$= PD^2 + QD^2 - 2OD.QD$ [ধাপ (১) থেকে]

(৪) এখন, $PR^2 + PQ^2 = PD^2 + QD^2 + 2.OD.QD + PD^2 + QD^2 - 2.OD.QD$ [ধাপ (২) ও (৩) যোগ করে]
$= 2PD^2 + 2.QD^2$
$= 2(QD^2 + PD^2)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৪৩ (i) ABC সমবাহু ত্রিভুজে AD ⊥ BC. *[গভ: ল্যাবরেটরি হাই স্কুল, খুলনা]*
(ii) PQR সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে $\angle P$ = 1 সমকোণ।

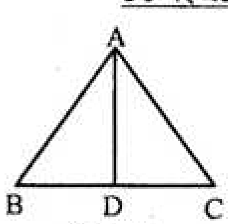
ক. ত্রিভুজ 2টি অংকন কর।

খ. (i) নং হতে প্রমাণ কর $4AD^2 = 3AB^2$

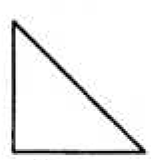
গ. (ii) নং ত্রিভুজে অতিভুজ QR এর উপরস্থ যে কোন বিন্দু A হলে, প্রমাণ কর $AQ^2 + AR^2 = 2AP^2$

৪৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



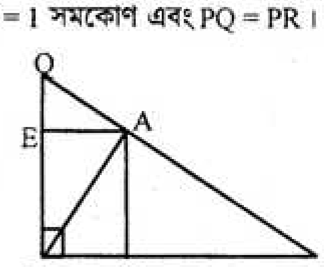
চিত্র–(i)


চিত্র–(ii)

দেওয়া আছে, ΔABC-সমবাহু
অর্থাৎ AB = BC = CA এবং AD, BC এর ওপর লম্ব।
PQR সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে $\angle P$ = 1 সমকোণ এবং PQ = PR।

খ ২(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ দেওয়া আছে, ΔQPR-এ QP = PR = 4 সে.মি. এবং $\angle P = 90°$। অতিভুজ QR এবং A, QR এর উপর যে কোনো বিন্দু। P, A যোগ করি।



প্রমাণ করতে হবে যে, $AQ^2 + AR^2 = 2AP^2$.

অঙ্কন: A বিন্দু থেকে PR ও QP বাহুর উপর যথাক্রমে AD ও AE লম্ব আঁকি।

প্রমাণ: ধাপ — যথার্থতা

(১) ΔQPR-এর, $\angle P = 90°$ [দেওয়া আছে]
এবং QP = PR হওয়ায়,
$\angle Q = \angle R = 45°$ [সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণগুলো সমান]

(২) এখন, ΔADR এর, $\angle D = 90°$ [$\because$ AD⊥PR]
সুতরাং $\angle DAR = \angle ARD = 45°$
$\therefore$ AD = DR
অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়,
ΔAQE সমকোণী ত্রিভুজে, AE = QE

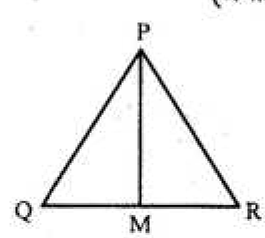
(৩) এখন, ADR সমকোণী ত্রিভুজে AR অতিভুজ হওয়ায়,
$AR^2 = AD^2 + DR^2$ [পীথাগোরাসের উপপাদ্য]
$= AD^2 + AD^2$ [$\because$ AD = DR]
$\therefore$ $AR^2 = 2AD^2$ .... (i)

(৪) আবার AQE সমকোণী ত্রিভুজে AQ অতিভুজ হওয়ায়,
$AQ^2 = AE^2 + QE^2$ [পীথাগোরাসের উপপাদ্য]
$= AE^2 + AE^2$ [$\because$ QE = AE]
$\therefore$ $AQ^2 = 2AE^2$ .... (ii)

(৫) (i) ও (ii)নং যোগ করে পাই,
$AR^2 + AQ^2 = 2AD^2 + 2AE^2$
$= 2(AD^2 + AE^2)$
আবার, AEPD একটি আয়তক্ষেত্র [$\because$ $\angle E = \angle P = \angle D$ = এক সমকোণ]
PD = AE [আয়তক্ষেত্রের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান]
$\therefore$ $AQ^2 + AR^2 = 2(AD^2 + PD^2)$ .... (iii)

(৬) ΔADP সমকোণী ত্রিভুজে AP অতিভুজ।
$\therefore$ $AP^2 = AD^2 + PD^2$ [পীথাগোরাসের উপপাদ্য]
(iii) নং থেকে, $AQ^2 + AR^2 = 2AP^2$
(প্রমাণিত)

প্রশ্ন ▶ ৪৪



[সাতক্ষীরা সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়]

ক. প্রতিসাম্য রেখা কী?

খ. যদি PQ ঃ PR = QM ঃ MR হয় তবে প্রমাণ কর যে, $\angle MPQ = \angle MPR$

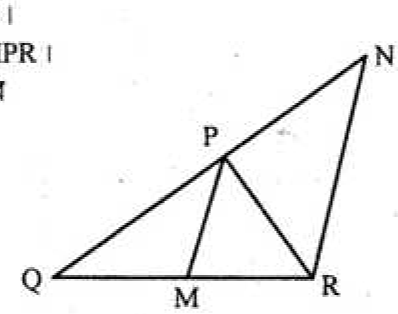
গ. যদি M, QR এর মধ্যবিন্দু হয় তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{2}(PQ^2 + PR^2) = PM^2 + MR^2$

৪৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **প্রতিসাম্য রেখা:** কোনো জ্যামিতিক বস্তুকে নির্দিষ্ট রেখা বরাবর ভাঁজ করলে যদি একটি অংশ সম্পূর্ণরূপে অন্য অংশের সাথে মিলে যায় তবে ঐ রেখাকে প্রতিসাম্য রেখা বলে। যেমন- একটি বর্গের চারটি প্রতিসাম্য রেখা আছে।

খ ΔPQR এ PQ : PR = QM : MR।
প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle MPQ = \angle MPR$।

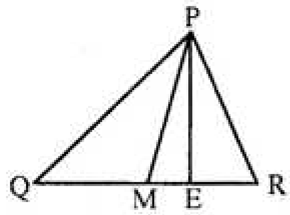
অঙ্কন: PM||RN আঁকি যা QP এর বর্ধিতাংশকে N বিন্দুতে ছেদ করে।



প্রমাণ: ΔQRN এ PM || NR
$\therefore$ $\frac{QM}{MR} = \frac{QP}{PN}$
কিন্তু $\frac{PQ}{PR} = \frac{QM}{MR}$
সুতরাং $\frac{QP}{PN} = \frac{PQ}{PR}$
বা, PN = PR
$\therefore$ $\angle PRN = \angle PNR$

আবার, $\angle PRN = \angle MPR$ [একান্তর]
এবং $\angle PNR = \angle MPQ$ [অনুরূপ]
$\therefore \angle MPR = \angle MPQ$
অর্থাৎ $\angle MPQ = \angle MPR$ **(প্রমাণিত)**

গ ΔPQR এ M, QR এর মধ্যবিন্দু।
প্রমাণ করতে হবে যে, $\frac{1}{2}(PQ^2 + PR^2)$
$= PM^2 + MR^2$



অঙ্কন: $PE \perp QR$ আঁকি।
প্রমাণ: ΔPQE এ $\angle PEQ = 90°$

$\therefore PQ^2 = PE^2 + QE^2$
$= PE^2 + (QM + ME)^2$
$= PE^2 + QM^2 + 2QM.ME + ME^2$
$= PE^2 + ME^2 + QM^2 + 2QM.ME$
$= PM^2 + QM^2 + 2QM.ME$

$\therefore PQ^2 = PM^2 + QM^2 + 2QM.ME$ .... (i)

আবার, ΔPER এ $PR^2 = PE^2 + RE^2$
$= PE^2 + (MR - ME)^2$
$= PE^2 + MR^2 - 2MR.ME + ME^2$
$= PE^2 + ME^2 + MR^2 - 2MR.ME$
$= PM^2 + MR^2 - 2MR.ME$

$\therefore PR^2 = PM^2 + MR^2 - 2MR.ME$............ (ii)

(i) + (ii) $\Rightarrow PQ^2 + PR^2 = PM^2 + QM^2 + 2QM.ME + PM^2 + MR^2 - 2MR.ME$

বা, $PQ^2 + PR^2 = PM^2 + MR^2 + 2MR.ME + PM^2 + MR^2 - 2MR.ME$
[$\because QM = MR$]
$= 2PM^2 + 2MR^2$
$= 2(PM^2 + MR^2)$

$\therefore PQ^2 + PR^2 = 2(PM^2 + MR^2)$

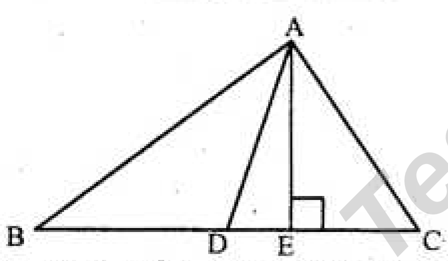
বা, $\frac{1}{2}(PQ^2 + PR^2) = (PM^2 + MR^2)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৪৫ ΔABC এর AD মধ্যমা, A থেকে $AE \perp BC$ *[ঝিনাইদহ ক্যাডেট কলেজ]*

ক. সংক্ষিপ্ত বর্ণনাসহ চিত্রটি আঁক।
খ. প্রমাণ কর যে, AD মধ্যমা ত্রিভুজটিকে সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত করেছে।
গ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$

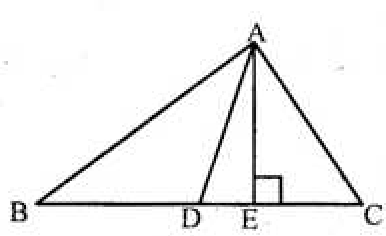
৪৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



চিত্রে, ΔABC এর ভূমি BC এর মধ্যবিন্দু D এবং AD মধ্যমা। শীর্ষ A থেকে BC এর উপর AE লম্ব।

খ **বিশেষ নির্বচন:** মনে করি, ΔABC-এর মধ্যমা AD. প্রমাণ করতে হবে যে, Δ-ক্ষেত্র ABD = Δ-ক্ষেত্র ACD.



অঙ্কন: A থেকে BC এর উপর AE লম্ব আঁকি। তাহলে AE, ΔABC-এর উচ্চতা।

প্রমাণ : ধাপ **যথার্থতা**

(১) $\Delta ABD = \frac{1}{2} \times BD \times AE$ ... ... (i) [ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা]

(২) $\Delta ACD = \frac{1}{2} CD \times AE = \frac{1}{2} BD \times AE$ ... ... (ii) [$\because CD = BD$]

(৩) Δ-ক্ষেত্র ABD = Δ-ক্ষেত্র ACD. **(প্রমাণিত)** [(i) ও (ii) নং থেকে]

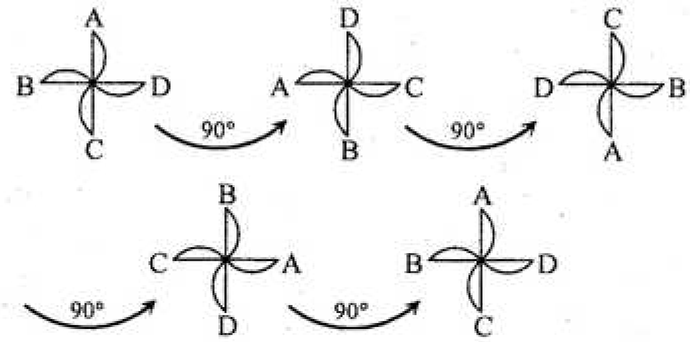
গ ২০(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৪৬ ΔPQR এর $\angle Q = 45°$, $\angle R = 60°$ এবং পরিসীমা = 11 সে.মি. এবং PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X ও Y। *[বরিশাল সরকারি বালিকা মাধ্যমিক বিদ্যালয়]*

ক. চার পাখাবিশিষ্ট ফ্যানের ঘূর্ণন প্রতি সমতার মাত্রা নির্ণয় কর।
খ. উদ্দীপকের ত্রিভুজটি আঁক।
গ. প্রমাণ কর : Δ ক্ষেত্র PXY $= \frac{1}{4} \Delta$ ক্ষেত্র PQR।

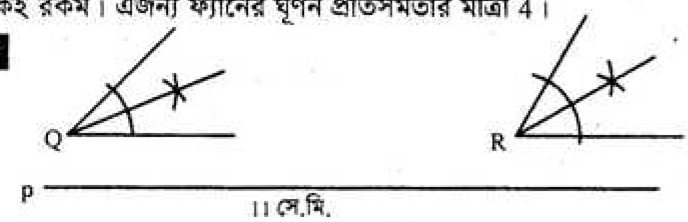
৪৬ নং প্রশ্নের সমাধান

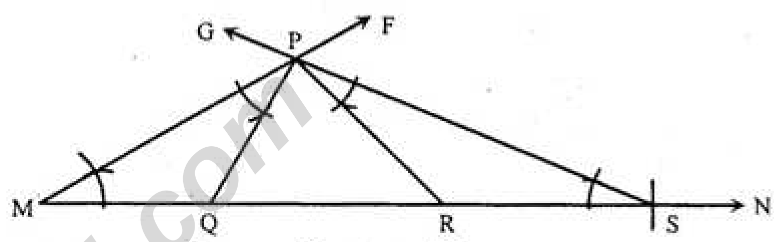
ক চার পাখা বিশিষ্ট ফ্যানের ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা হলো 4। চিত্রে চারপাখা বিশিষ্ট ফ্যানের 90° করে ঘূর্ণনের ফলে বিভিন্ন অবস্থান দেখানো হয়েছে:



এখানে, ফ্যানের একবার পূর্ণ ঘূর্ণনে ঠিক চারটি অবস্থানে ফ্যানটি দেখতে একই রকম। এজন্য ফ্যানের ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা 4।

খ



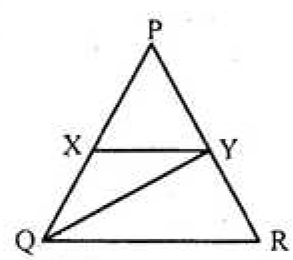


দেওয়া আছে, PQR ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুইটি কোণ $\angle Q = 45°$, $\angle R = 60°$, এবং পরিসীমা P = 11 সেমি। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ:

(১) যেকোন রশ্মি MN থেকে MS = 11 সে.মি. কেটে নিই। MS এর M বিন্দুতে $\angle SMF = \frac{1}{2}\angle Q$ এবং S বিন্দুতে $\angle MSG = \frac{1}{2}\angle R$ আঁকি। মনে করি MF ও SG পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে।
(২) P বিন্দুতে $\angle PMS$ এর সমান করে $\angle MPQ$ এবং $\angle PSM$ এর সমান করে $\angle RPS$ কোণ আঁকি।
(৩) PQ ও PR যথাক্রমে MS কে Q ও R বিন্দুতে ছেদ করে।
তাহলে ΔPQR ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

গ **বিশেষ নির্বচন:** দেওয়া আছে, ΔPQR-এর PQ এবং PR বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X ও Y এবং X, Y যোগ করি।
প্রমাণ করতে হবে যে,
$\Delta PXY = \frac{1}{4}(\Delta$ ক্ষেত্র PQR)



অঙ্কন: Q, Y যোগ করি।

প্রমাণ: ধাপ যথার্থতা

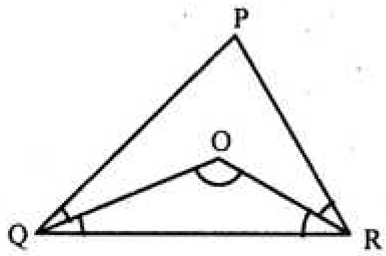
(১) ΔPQY-এ XY, PQ এর মধ্যমা।
Δ ক্ষেত্র PXY $= \frac{1}{2}(\Delta$-ক্ষেত্র PQY) [$\therefore$ XY মধ্যমা Δ ক্ষেত্র PQY-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
$\therefore \Delta PQY = 2$ (Δ-ক্ষেত্র PXY)
(২) ΔPQR-এ QY, PR এর উপর মধ্যমা।
Δ-ক্ষেত্র PQY $= \frac{1}{2}(\Delta$-ক্ষেত্র PQR) [একই কারণে]
বা, 2(Δ-ক্ষেত্র PXY) $= \frac{1}{2}(\Delta$-ক্ষেত্র PQR) [ধাপ ১ হতে]
বা, Δ-ক্ষেত্র PXY $= \frac{1}{4}(\Delta$-ক্ষেত্র PQR) **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৪৭ ΔPQR এ $\angle Q$ ও $\angle R$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। *[পিরোজপুর সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়]*

ক. উদ্দীপকের আলোকে চিত্রটি আঁক।
খ. দেখাও যে, $\angle QOR = 90° + \frac{1}{2}\angle P$
গ. ΔPQR এর $PQ^2 + PR^2 = QR^2$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\angle QPR = 1$ সমকোণ।

৪৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



খ **বিশেষ নির্বচন:** দেওয়া আছে, কোনো ত্রিভুজ PQR এর $\angle Q$ এবং $\angle R$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। অর্থাৎ, QO এবং RO যথাক্রমে $\angle PQR$ এবং $\angle PRQ$ এর সমদ্বিখণ্ডক। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle QOR = 90° + \frac{1}{2}\angle P$.

প্রমাণ:

ধাপ — **যথার্থতা**

(১) ΔPQR-এ

$\angle P + \angle Q + \angle R = 180°$ [∵ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180° বা 2 সমকোণ]

বা, $\frac{1}{2}\angle P + \frac{1}{2}\angle Q + \frac{1}{2}\angle R = 90°$ [উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে পাই]

$\therefore \frac{1}{2}\angle Q + \frac{1}{2}\angle R = 90° - \frac{1}{2}\angle P$ .... (i)

(২) ΔQOR-এ

$\angle QOR + \angle OQR + \angle ORQ = 180°$

বা, $\angle QOR + \frac{1}{2}\angle Q + \frac{1}{2}\angle R = 180°$ [∵ QO এবং RO রেখা যথাক্রমে $\angle Q$ ও $\angle R$-এর সমদ্বিখণ্ডক]

বা, $\angle QOR + 90° - \frac{1}{2}\angle P = 180°$ [(i) নং হতে]

বা, $\angle QOR = 180° - 90° + \frac{1}{2}\angle P$

$\therefore \angle QOR = 90° + \frac{1}{2}\angle P$ **(দেখানো হলো)**

গ ১০(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৪৮ ABC ত্রিভুজে $\angle C = 1$ সমকোণ এবং D, AB এর মধ্যবিন্দু। *[উত্তরা হাই স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]*

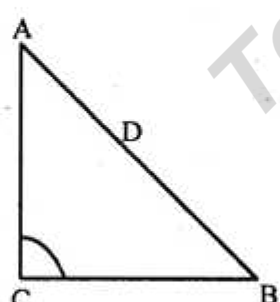
ক. প্রদত্ত তথ্য অনুযায়ী চিত্র অংকন কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

গ. দেখাও যে, CD এর দৈর্ঘ্য AB এর অর্ধেক।

৪৮ নং প্রশ্নের সমাধান

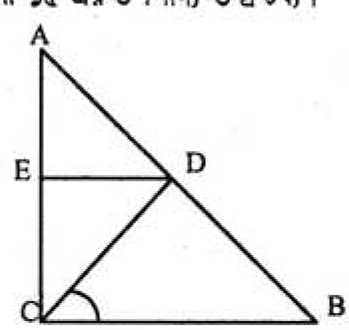
ক



মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ। যার $\angle ACB = 1$ সমকোণ এবং AB এর মধ্যবিন্দু D।

খ মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১৫ এর উপপাদ্য-৩ দ্রষ্টব্য।

গ মনে করি, ABC ত্রিভুজের $\angle C = 90°$ এবং D, AB এর মধ্যবিন্দু। C, D যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $CD = \frac{1}{2}AB$.



অঙ্কন: AC এর মধ্যবিন্দু E নির্ণয় করি এবং E, D যোগ করি।

প্রমাণ: **ধাপ** — **যথার্থতা**

(১) ΔABC এর AB ও AC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E। সুতরাং $DE \parallel BC$ [ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল]

(২) ΔAED ও ΔCED এ

$AE = CE$ [E, AC এর মধ্যবিন্দু]

$ED = ED$ [সাধারণ বাহু]

$\angle AED =$ এক সমকোণ $= \angle CED$ [∵ $DE \parallel BC$ ∴ $\angle AED = \angle ECB = 90°$]

$\therefore \Delta AED \cong \Delta CED$

$\therefore AD = CD$

কিন্তু $AD = \frac{1}{2}AB$ [D, AB এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore CD = \frac{1}{2}AB$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৪৯ ΔABC এর $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। DA এর সমান্তরাল CE রেখাংশ বর্ধিত BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। *[সাউথ পয়েন্ট স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]*

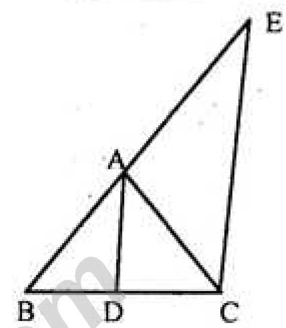
ক. উদ্দীপকের আলোকে চিত্রটি অঙ্কন কর।

খ. প্রমাণ কর যে, BD : DC = BA : AC।

গ. ΔABC এর AD মধ্যমা হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$।

৪৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



খ 'ক' এর চিত্রে,

ΔABC এর $\angle A$ এর সমদ্বিখন্ডক AD, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। DA এর সমান্তরাল CE রেখাংশ বর্ধিত BA কে E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ: **ধাপ** — **যথার্থতা**

(১) ΔBCE এর $CE \parallel DA$

$\frac{BA}{AE} = \frac{BD}{CD}$

(২) যেহেতু $DA \parallel CE$ এবং BE ও AC তাদের ছেদক

$\therefore \angle AEC = \angle BAD$ [অনুরূপ কোণ]

(৩) কিন্তু $\angle BAD = \angle CAD$

$\therefore \angle ACE = \angle AEC$

$\therefore AC = AE$

(৪) $\frac{BA}{AE} = \frac{BD}{CD}$ [ধাপ-১]

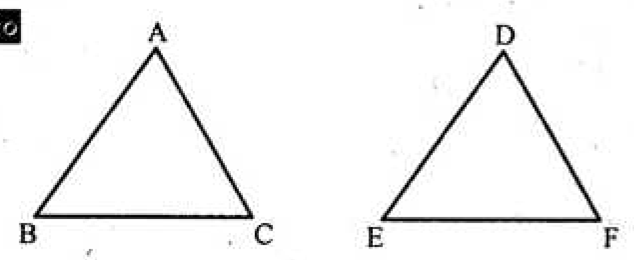
বা, $\frac{BA}{AC} = \frac{BD}{CD}$

বা, BA ∶ AC = BD ∶ CD

∴ BD ∶ DC = BA ∶ AC **(প্রমাণিত)**

গ ২০(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৫০



চিত্রে ΔABC এবং ΔDEF সদৃশকোণী। *[নেত্রকোণা সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, নেত্রকোণা]*

ক. দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হওয়ার শর্তগুলো লিখ।

খ. প্রমাণ কর যে, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DE}$.

গ. ΔABC সমবাহু ত্রিভুজ এবং $AD \perp BC$ হলে দেখাও যে, $3AB^2 = 4AD^2$.

৫০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হওয়ার শর্ত:

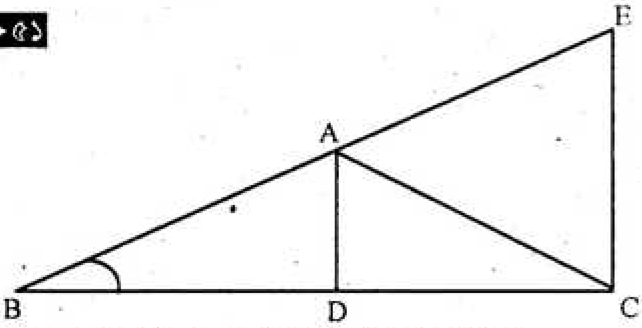
(১) দুইটি ত্রিভুজের অনুরূপ কোণগুলো সমান হবে।

(২) অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান হবে।

খ মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১৪.২ এর উপপাদ্য-৫ দ্রষ্টব্য।

গ ২(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৫১



চিত্রে AD রেখাংশ $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক এবং $AD \parallel CE$.

[পালং তুলাসার গুরুদাস সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, শরীয়তপুর]

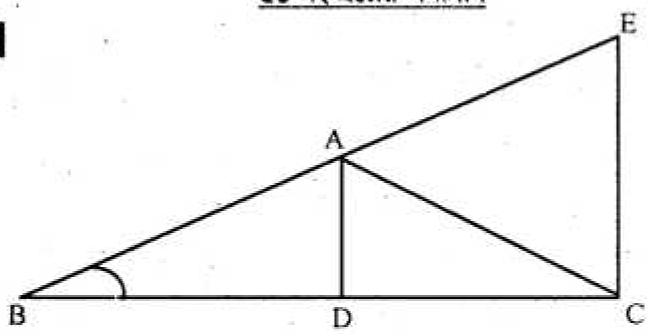
ক. দেখাও যে, $\triangle ABD$ ও $\triangle EBC$ সদৃশকোণী।

খ. প্রমাণ কর যে, BC বাহু D বিন্দুতে AB ও AC বাহুর অনুপাতে বিভক্ত হয়েছে।

গ. যদি D বিন্দুতে BC বাহুর মধ্যবিন্দু হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$.

৫১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



চিত্রে AD রেখাংশ $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক এবং $AD \parallel CE$ দেখাতে হবে যে, $\triangle ABD$ ও $\triangle EBC$ সদৃশকোণী।

প্রমাণ: **ধাপ** **যথার্থতা**

(১) $AD \parallel CE$ এবং BE ছেদক

$\therefore \angle BAD = \angle BEC$ [অনুরূপ কোণ বলে]

এবং $\angle ABD = \angle EBC$ [সাধারণ কোণ]

$\therefore \angle ADB = \angle BCE$ [অবশিষ্ট কোণ]

$\therefore \triangle ABD$ ও $\triangle EBC$ সদৃশকোণী। [ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি $180°$ বলে]

(দেখানো হলো)

খ 'ক' এর চিত্রে,

$\triangle ABC$ এর $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। DA এর সমান্তরাল CE রেখাংশ বর্ধিত BA কে E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ: **ধাপ** **যথার্থতা**

(১) $\triangle BCE$ এর $CE \parallel DA$

$\frac{BA}{AE} = \frac{BD}{CD}$

(২) যেহেতু $DA \parallel CE$ এবং BE ও AC তাদের ছেদক

$\therefore \angle AEC = \angle BAD$ [অনুরূপ কোণ]

এবং $\angle ACE = \angle CAD$ [একান্তর কোণ]

(৩) কিন্তু $\angle BAD = \angle CAD$

$\therefore \angle ACE = \angle AEC$

$\therefore AC = AE$

(৪) $\frac{BA}{AE} = \frac{BD}{CD}$ [ধাপ-১]

বা, $\frac{BA}{AC} = \frac{BD}{CD}$

বা, $BA : AC = BD : CD$

$\therefore BD : DC = BA : AC$ (প্রমাণিত)

গ ২০(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৫২ ABC ত্রিভুজের $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ এবং AP, BC এর উপর লম্ব।

[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, মোমেনশাহী]

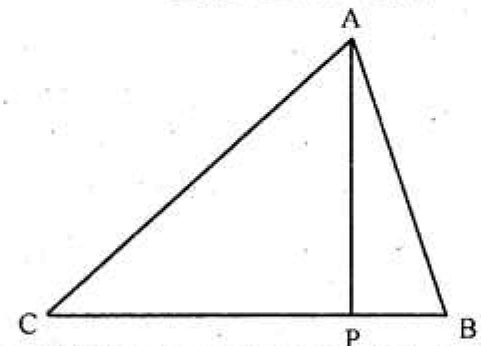
ক. তথ্যগুলো চিত্রের মাধ্যমে দেখাও।

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.PC$।

গ. AD মধ্যমা এঁকে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

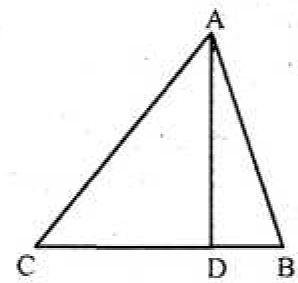
৫২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক

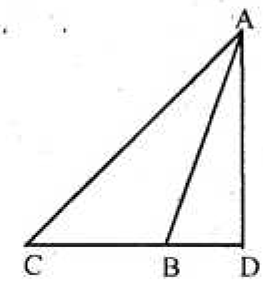


দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ এবং AP, BC এর উপর লম্ব। $\angle APC = 90°$।

খ



চিত্র-১



চিত্র-২

বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, $\triangle ABC$ এর $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ। AD, BC এর (বা CB এর বর্ধিতাংশের চিত্র (২)) ওপর লম্ব।

অর্থাৎ $\angle ADB = \angle ADC = 90°$.

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD$.

প্রমাণ : ধাপ **যথার্থতা**

(১) $\triangle ACD$ এ $\angle ADC$ = এক সমকোণ এবং অতিভুজ AC.

$\therefore AC^2 = AD^2 + CD^2$ ... ... (i) [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

(২) $\triangle ABD$ এ $\angle ADB$ = এক সমকোণ এবং অতিভুজ AB.

$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

(৩) চিত্র ১ এ,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$

$= AD^2 + (BC - CD)^2$ [$\because BD = BC - CD$]

$= AD^2 + BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD$ [সূত্র ব্যবহার করে]

$= (AD^2 + CD^2) + BC^2 - 2BC \cdot CD$

$= AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD$ [(i) নং থেকে]

চিত্র-২ এ,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$

$= AD^2 + (CD - BC)^2$ [$\because BD = CD - BC$]

$= AD^2 + CD^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD$ [সূত্র ব্যবহার করে]

$= AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD$ [(i) নং থেকে]

সুতরাং, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD$. (দেখানো হলো)

গ ২০(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৫৩ একটি সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা 12 সে. মি.।

[রাজশাহী ক্যান্টনমেন্ট বোর্ড উচ্চ বিদ্যালয়]

ক. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত সে. মি.?

খ. ত্রিভুজটি অংকন করা। অংকনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক।

গ. এমন একটি সামান্তরিক অংকন কর যার ক্ষেত্রফল উক্ত ক্ষেত্রফলের সমান এবং যার একটি $\angle x = 30°$ এর সমান। (অংকনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক।)

৫৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা = 12 সে.মি.

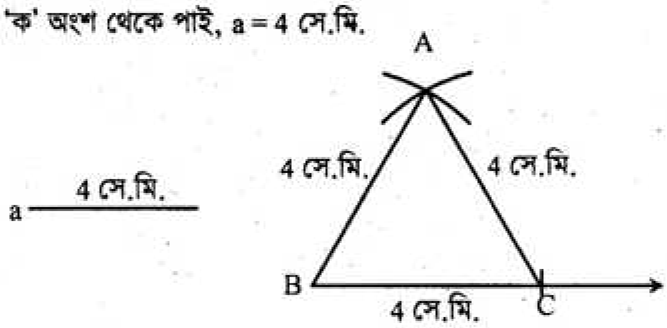
$\therefore$ সমবাহু ত্রিভুজের এক বাহুর দৈর্ঘ্য $a = \frac{12}{3} = 4$ সে.মি.

আমরা জানি, সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ বর্গ একক

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (4)^2$ বর্গ সে.মি.

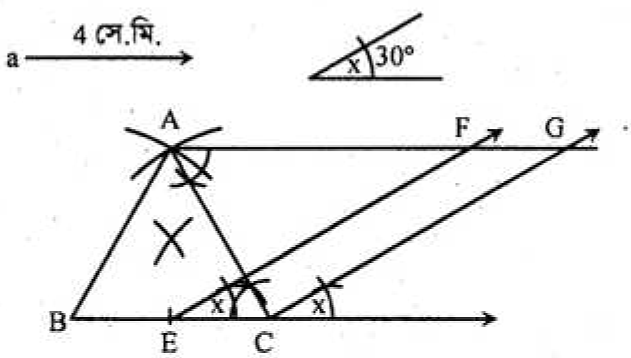
$= 4\sqrt{3}$ বর্গ সে.মি. (Ans.)

খ 'ক' অংশ থেকে পাই, a = 4 সে.মি.



অঙ্কন: (১) সমবাহু ত্রিভুজের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য a = 4 সে.মি. a বাহুর সমান করে BC রেখা নিই।
(২) B ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে a এর সমান করে BC রেখার একই পার্শ্বে দুটি বৃত্তচাপ আঁকি।
(৩) চাপদ্বয় A বিন্দুতে ছেদ করে। A, B ও A, C যোগ করি। তাহলে ABC-ই উদ্দিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজ।

গ



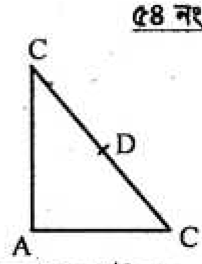
মনে করি, ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ ক্ষেত্র এবং $\angle x = 30°$ একটি নির্দিষ্ট কোণ। এরূপ সামান্তরিক আঁকতে হবে, যার একটি কোণ $\angle x$ এর সমান এবং যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফলের সমান।
অংকন: BC বাহুকে E বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করি। EB রেখাংশের E বিন্দুতে $\angle x = 30°$ এর সমান $\angle CEF$ আঁকি। A বিন্দু দিয়ে BC বাহুর সমান্তরাল AG রশ্মি টানি এবং মনে করি তা EF রশ্মিকে F বিন্দুতে ছেদ করে। C বিন্দু দিয়ে EF রেখাংশের সমান্তরাল CG রশ্মি টানি এবং মনে করি তা AG রশ্মিকে G বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ECGF ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

প্রশ্ন ▶৫৪ মনে কর, ΔABC এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D।
[দাশুড়িয়া এম. এম উচ্চ বিদ্যালয়, ঈশ্বরদী, পাবনা]

ক. ত্রিভুজটি অংকন কর।
খ. প্রমাণ কর যে, AB + AC > 2AD।
গ. যদি অপর দুই বাহু AB ও AC এর মধ্য বিন্দু যথাক্রমে X ও Y হয়, তবে প্রমাণ কর যে, Δ ক্ষেত্রে AXY এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{4}\Delta$ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল।

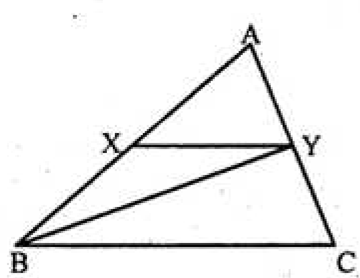
৫৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



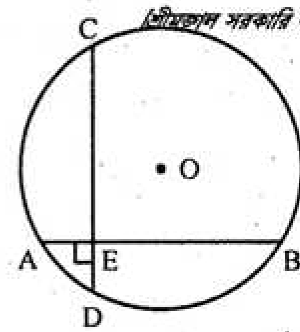
খ ৪(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ **বিশেষ নির্বচন:** মনে করি ΔABC-এর AB এবং AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X এবং Y. X,Y যোগ করি।



প্রমাণ করতে হবে যে,
Δ-ক্ষেত্র AXY এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{4}$(Δ-ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল)
অঙ্কন: B, Y যোগ করি।
প্রমাণ : ধাপ **যথার্থতা**
(১) ΔABY-এ XY, AB এর ওপর মধ্যমা।
Δ-ক্ষেত্র AXY $= \frac{1}{2}$(Δ-ক্ষেত্র ABY) [$\because$ XY মধ্যমা Δ-ক্ষেত্র ABY-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
$\therefore$ Δ-ক্ষেত্র ABY = 2(Δ-ক্ষেত্র AXY)
(২) ΔABC- এ BY, AC-এর ওপর মধ্যমা।
$\therefore$ Δ-ক্ষেত্র ABY $= \frac{1}{2}$(Δ-ক্ষেত্র ABC) [একই কারণে]
বা, 2(Δ-ক্ষেত্র AXY) $= \frac{1}{2}$(Δ-ক্ষেত্র ABC) [ধাপ (১)হতে]
$\therefore$ Δ-ক্ষেত্র AXY $= \frac{1}{2}\{\frac{1}{2}$($\Delta$-ক্ষেত্র ABC)$\} = \frac{1}{4}$ (Δ-ক্ষেত্র ABC)
অর্থাৎ, Δ-ক্ষেত্র AXY এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{4}$ (Δ-ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল)
(প্রমাণিত)

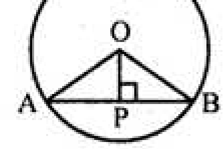
প্রশ্ন ▶৫৫ *শ্রীমঙ্গল সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, মৌলভীবাজার*



ক. $OP \perp AB$ হলে প্রমাণ কর যে, $AP = \frac{1}{2}AB$। ২
খ. প্রমাণ কর যে, $2\angle AEC = (\angle BOD + \angle AOC)$ ৪
গ. ΔBEC এর $\angle E = 90°$ এবং Q, BC এর মধ্যবিন্দু প্রমাণ কর যে, $EQ^2 = BQ^2 = \frac{1}{4}BC^2$। ৪

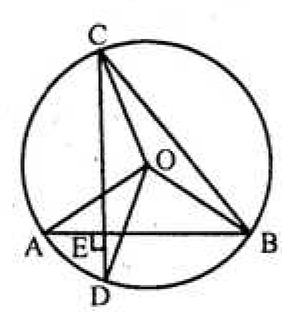
৫৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে $OP \perp AB$.
প্রমাণ করতে হবে যে,
$AP = \frac{1}{2}AB$।



অঙ্কন: O, A; O, B যোগ করি।
প্রমাণ: ধাপ **যথার্থতা**
(১) $OP \perp AB$ হওয়ায়,
$\angle OPA = \angle OPB$ = এক সমকোণ
অতএব, ΔOAP ও ΔOPB উভয়েই সমকোণী ত্রিভুজ।
(২) এখন, OAP এবং OPB সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে
অতিভুজ OA = অতিভুজ OB [উভয়েই একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
এবং OP = OP [সাধারণ বাহু]
$\therefore \Delta OAP \cong \Delta OPB$
$\therefore AP = PB$
$\therefore AP = \frac{1}{2}AB$ **(প্রমাণিত)**

খ O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB ও CD জ্যা দুইটি পরস্পরকে E বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $2\angle AEC = (\angle BOD + \angle AOC)$।

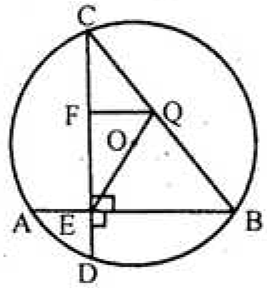


অঙ্কন: O, A; O, B; O, C; O, D এবং C, B যোগ করি।
প্রমাণ: ধাপ **যথার্থতা**
(১) ΔBEC-এ বহি:স্থ $\angle AEC$ = অন্ত:স্থ $(\angle BCE + \angle CBE)$ [ত্রিভুজের বহি:স্থ কোণ অন্ত:স্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।]
বা, $\angle AEC = \angle BCD + \angle ABC$
(২) এখন, BD চাপের উপর অবস্থিত $\angle BCD$ বৃত্তস্থ কোণ এবং $\angle BOD$ কেন্দ্রস্থ কোণ।
$\therefore \angle BOD = 2\angle BCD$ [বৃত্তের একই চাপের দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]
(৩) আবার, AC চাপের উপর অবস্থিত $\angle ABC$ বৃত্তস্থ কোণ এবং $\angle AOC$ কেন্দ্রস্থ কোণ।
$\therefore \angle AOC = 2\angle ABC$ [ঐ একই কারণে]

(৪) $\therefore \angle BOD + \angle AOC = 2\angle BCD + 2\angle ABC$
$= 2(\angle BCD + \angle ABC)$
$= 2\angle AEC$

$\therefore 2\angle AEC = (\angle BOD + \angle AOC)$ **(প্রমাণিত)**

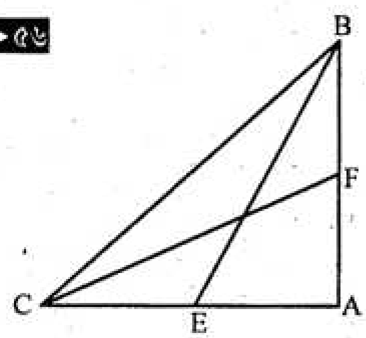
গ



O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে ΔBEC এবং $\angle E = 90°$ এবং Q, BC এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $EQ^2 = BQ^2 = \frac{1}{4}BC^2$। E, Q যোগ করি। EC এর মধ্যবিন্দু F নিয়ে F, Q যোগ করি।

প্রমাণ: ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔBEC এর F ও Q যথাক্রমে CE এবং BC এর মধ্যবিন্দু।	[অঙ্কন এবং কল্পনানুসারে]
$\therefore FQ \parallel EB$	[∵ ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখা এর বাহুর সমান্তরাল।]
$\therefore \angle CFQ = \angle FEB$ = এক সমকোণ	
(২) এখন, ΔCFQ এবং ΔEFQ এর মধ্যে	[কল্পনা]
CF = FE,	[∵ F, CE এর মধ্যবিন্দু]
FQ বাহু সাধারণ এবং	
অন্তর্ভুক্ত $\angle CFQ$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle EFQ$।	[∵ প্রত্যেকে সমকোণ]
$\Delta CFQ \cong \Delta EFQ$	
$\therefore CQ = EQ$	
(৩) কিন্তু $CQ = \frac{1}{2}BC = BQ$	
$\therefore BQ = EQ = \frac{1}{2}BC$	
$\therefore BQ^2 = EQ^2 = \frac{1}{4}BC^2$ **(প্রমাণিত)**	

প্রশ্ন ▶ ৫৬



ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle A$ = 1 সমকোণ, BE ও CF দুটি মধ্যমা।

[শাহজালাল জামেয়া ইসলামিয়া স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট]

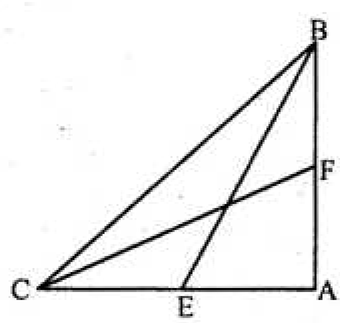
ক. পীথাগোরাসের উপপাদ্যটি লেখ।
খ. পীথাগোরাসের বিপরীত উপপাদ্যটি প্রমাণ কর।
গ. প্রমাণ কর যে, $4(BE^2 + CF^2) = 5BC^2$.

৫৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **পীথাগোরাসের উপপাদ্য:** সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল। অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

খ ১০(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle BAC = 90°$ এবং F, E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু। C, F ও B, E যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $4(BE^2 + CF^2) = 5BC^2$



প্রমাণ: ধাপ	যথার্থতা
(১) ABC সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ = BC	
$\therefore BC^2 = AB^2 + AC^2$ .... (i)	[পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]
(২) AB বাহুর উপর ΔABC এর মধ্যমা CF	
$\therefore AF = BF = \frac{1}{2}AB$	
অনুরূপভাবে, $AE = CE = \frac{1}{2}AC$	[পীথাগোরাসের উপপাদ্য
(৩) ABE সমকোণী ত্রিভুজে, $BE^2 = AB^2 + AE^2$ .... (ii)	অনুসারে]
(৪) ACF সমকোণী ত্রিভুজে, $CF^2 = AC^2 + AF^2$ .... (iii)	

(ii) নং ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,
$BE^2 + CF^2 = AB^2 + AE^2 + AC^2 + AF^2$
বা, $BE^2 + CF^2 = (AB^2 + AC^2) + AE^2 + AF^2$
বা, $4(BE^2 + CF^2) = 4BC^2 + 4AE^2 + 4AF^2$ [4 দ্বারা গুণ করে]
$= 4BC^2 + (2AE)^2 + (2AF)^2$
$= 4BC^2 + AC^2 + AB^2$
$= 4BC^2 + BC^2$

$\therefore 4(BE^2 + CF^2) = 5BC^2$ **(প্রমাণিত)**

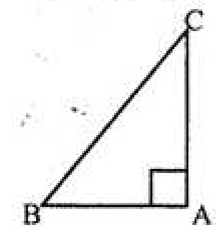
প্রশ্ন ▶ ৫৭ ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার AB = AC এবং অতিভুজ BC এর উপর P যে কোন বিন্দু।

[বিসিআইসি কলেজ, ঢাকা]

ক. পীথাগোরাসের উপপাদ্যটি লিখ।
খ. প্রমাণ কর যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$
গ. DEF ত্রিভুজটি ABC এর সদৃশ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

৫৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **পীথাগোরাসের উপপাদ্য:** সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অংকিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।



ΔABC সমকোণী ত্রিভুজে পীথাগোরাসের উপপাদ্য হতে পাই,
$AB^2 + AC^2 = BC^2$

খ ৬(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১৪, উপপাদ্য-৫ নং দ্রষ্টব্য।

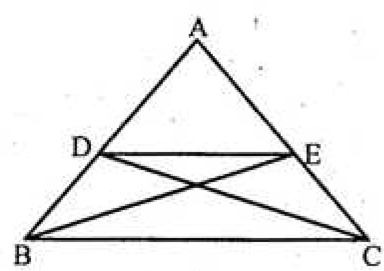
প্রশ্ন ▶ ৫৮ ΔABC এ BC ভূমি সমান্তরাল যে কোন সরলরেখা AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে।

[কৃষি বিশ্ববিদ্যালয় হাইস্কুল, ময়মনসিংহ]

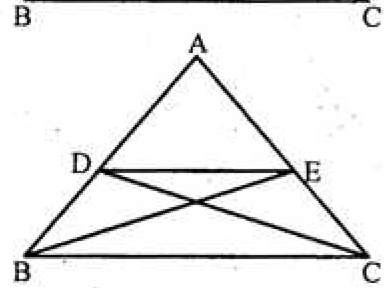
ক. উপরোক্ত তথ্যের আলোকে জ্যামিতিক চিত্র আঁক।
খ. প্রমাণ কর যে, Δ ক্ষেত্র DBC = Δ ক্ষেত্র EBC এবং Δ ক্ষেত্র DBE = Δ ক্ষেত্র CDE.
গ. ΔABC এর $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ এবং $AD \perp BC$ এর প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$

৫৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



খ



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC এর BC ভূমির সমান্তরাল যেকোনো সরলরেখা AB ও AC কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। D, C ও B, E যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, Δ-ক্ষেত্র DBC = Δ-ক্ষেত্র EBC এবং Δ-ক্ষেত্র DBE = Δ-ক্ষেত্র CDE.

প্রমাণ : ধাপ	যথার্থতা
(১) Δ-ক্ষেত্র DBC ও Δ-ক্ষেত্র EBC একই ভূমি BC এর উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল BC ও DE এর মধ্যে অবস্থিত।	
$\therefore$ Δ-ক্ষেত্র DBC = Δ-ক্ষেত্র EBC	[একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাগুলোর মধ্যে অবস্থিত সকল ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান]

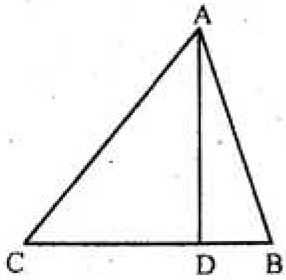
(২) Δ-ক্ষেত্র DBE ও Δ-ক্ষেত্র CDE একই ভূমি DE এর উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল BC ও DE এর মধ্যে অবস্থিত।

∴ Δ-ক্ষেত্র DBE = Δ-ক্ষেত্র CDE; [একই কারণে]

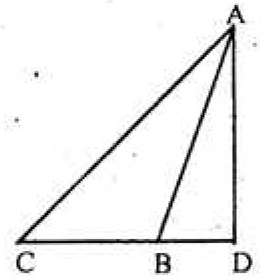
∴ Δ-ক্ষেত্র DBC = Δ-ক্ষেত্র EBC এবং

Δ-ক্ষেত্র DBE = Δ-ক্ষেত্র CDE (প্রমাণিত)

গ



চিত্র-১



চিত্র-২

বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC এর ∠C সূক্ষ্মকোণ। AD, BC এর (বা CB এর বর্ধিতাংশের চিত্র (২)) ওপর লম্ব।

অর্থাৎ ∠ADB = ∠ADC = 90°.

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD$.

প্রমাণ : ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔACD এ ∠ADC = এক সমকোণ এবং অতিভুজ AC.	
∴ $AC^2 = AD^2 + CD^2$ ... ... (i)	[পিথাগোরাসের উপপাদ্য]
(২) ΔABD এ ∠ADB = এক সমকোণ এবং অতিভুজ AB.	
∴ $AB^2 = AD^2 + BD^2$	[পিথাগোরাসের উপপাদ্য]
(৩) চিত্র ১ এ,	
$AB^2 = AD^2 + BD^2$	
$= AD^2 + (BC - CD)^2$	[∵ BD = BC − CD]
$= AD^2 + BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD$	[সূত্র ব্যবহার করে]
$= (AD^2 + CD^2) + BC^2 - 2BC \cdot CD$	
$= AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD$	[(i) নং থেকে]
চিত্র-২ এ,	
$AB^2 = AD^2 + BD^2$	
$= AD^2 + (CD - BC)^2$	[∵ BD = CD − BC]
$= AD^2 + CD^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD$	[সূত্র ব্যবহার করে]
$= AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD$	[(i) নং থেকে]

সুতরাং, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD$. (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ▶৫৯ PQR সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ QR এর উপর M যে কোন বিন্দু। D, PQ এর উপর যেকোন বিন্দু। [ফরিদপুর জিলা স্কুল]

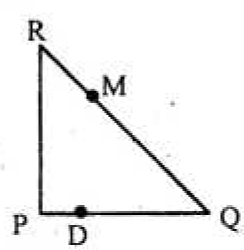
ক. উদ্দীপকের তথ্যগুলো চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. দেখাও যে, $RQ^2 + PD^2 = PQ^2 + RD^2$

গ. প্রমাণ কর যে, $MR^2 + MQ^2 = 2PM^2$

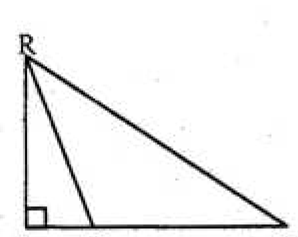
৫৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



PQR সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার PR = PQ। M, QR এর উপর যে কোন বিন্দু। D, PQ এর উপর যে কোন বিন্দু।

খ ΔPRQ-এর ∠P = এক সমকোণ এবং D, P Q এর উপরস্থ একটি বিন্দু। R, D যোগ করি।



প্রমাণ করতে হবে যে,

$RQ^2 + PD^2 = RD^2 + PQ^2$.

প্রমাণ: ΔPRQ সমকোণী যার অতিভুজ RQ

∴ $RQ^2 = PR^2 + PQ^2$ ... ... (i)

[পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

আবার, ΔPRD সমকোণী যার অতিভুজ RD

∴ $RD^2 = PR^2 + PD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

বা, $PD^2 = RD^2 - PR^2$ ... ... (ii)

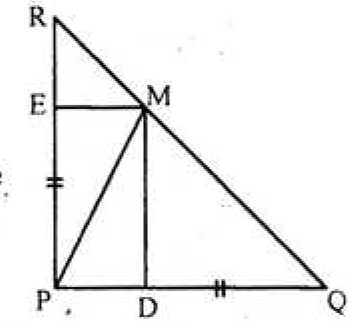
(i) নং ও (ii) নং যোগ করে পাই,

∴ $RQ^2 + PD^2 = PR^2 + PQ^2 + RD^2 - PR^2$

বা, $RQ^2 + PD^2 = PQ^2 + RD^2$

∴ $RQ^2 + PD^2 = RD^2 + PQ^2$ (প্রমাণিত)

গ মনে করি, সমদ্বিবাহু সমকোণী ΔPRQ-এর PR = PQ এবং অতিভুজ RQ। M, RQ এর ওপর যেকোনো বিন্দু। M, P যোগ করি।



প্রমাণ করতে হবে যে, $MR^2 + MQ^2 = 2MP^2$.

অঙ্কন: M বিন্দু থেকে PR এবং PQ বাহুর ওপর যথাক্রমে ME এবং MD লম্ব টানি।

প্রমাণ: ΔPRQ-এর, ∠P = 90°

এবং PQ = PR হওয়ায়, ∠R = ∠Q = 45°

এখন, ΔMDQ-এর, ∠D = 90° [∵ MD ⊥ PQ]

সুতরাং, ∠DMQ = ∠DQM = 45°

∴ QD = MD

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়, MRE সমকোণী ত্রিভুজে, ME = RE

এখন, MDQ সমকোণী ত্রিভুজে MQ অতিভুজ হওয়ায়

$MQ^2 = MD^2 + QD^2 = MD^2 + MD^2$ [∵ MD = QD]

∴ $MQ^2 = 2MD^2$ ... ... (i)

আবার, MRE সমকোণী ত্রিভুজে MR অতিভুজ হওয়ায়,

$MR^2 = RE^2 + ME^2$

$= ME^2 + ME^2$ [∵ RE = ME]

∴ $MR^2 = 2ME^2$ ... ... (ii)

এখন, (i) এবং (ii) নং যোগ করে পাই,

$MQ^2 + MR^2 = 2MD^2 + 2ME^2 = 2(MD^2 + ME^2)$

আবার, ∠E = ∠P = ∠D = এক সমকোণ হওয়ায় PDME একটি আয়ত।

∴ ME = PD [∵ আয়তক্ষেত্রের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান]

∴ $MQ^2 + MR^2 = 2(MD^2 + PD^2)$ ... ... (iii)

PDM সমকোণী ত্রিভুজে MP অতিভুজ হওয়ায়,

$MP^2 = MD^2 + PD^2$

তাহলে, (iii) নং হতে পাই,

$MQ^2 + MR^2 = 2MP^2$

∴ $MR^2 + MQ^2 = 2MP^2$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ▶৬০ ABC একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। BC অতিভুজ এবং AD মধ্যমা। [তনোত্তন সরকারী বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, মাদারীপুর]

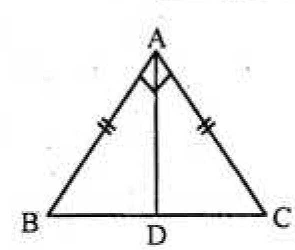
ক. উপরের তথ্যটি অঙ্কন কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$

গ. P, BC এর উপর যে কোন বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$

৬০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



চিত্রে ABC একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার AB = AC, ∠A = 1 সমকোণ, BC অতিভুজ এবং AD, BC এর উপর মধ্যমা।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$

খ ২০(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ ৬(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৬১ ΔABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। AD ⊥ BC এবং ∠B ও ∠C সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হয়। [মোমেনা আলী বিজ্ঞান স্কুল, সিরাজগঞ্জ]

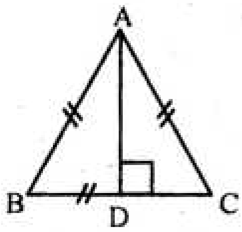
ক. প্রদত্ত তথ্য অনুসারে চিত্র আঁক।

খ. প্রমাণ কর যে, $\angle BOC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$

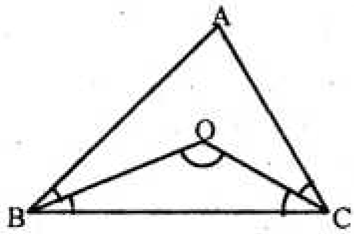
গ. প্রমাণ কর যে, $3AB^2 = 4AD^2$

৬১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



খ **বিশেষ নির্বচন:** দেওয়া আছে, ত্রিভুজ ABC এর $\angle B$ এবং $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। অর্থাৎ, BO এবং CO যথাক্রমে $\angle ABC$ এবং $\angle ACB$ এর সমদ্বিখণ্ডক। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BOC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$.



প্রমাণ: **ধাপ** **যথার্থতা**

(১) ΔABC-এ

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ [$\because$ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180°]

বা, $\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 90°$ [উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে পাই]

$\therefore \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 90° - \frac{1}{2}\angle A$ ……… (i)

(২) ΔBOC-এ

$\angle BOC + \angle OBC + \angle OCB = 180°$

বা, $\angle BOC + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 180°$ [$\because$ BO এবং CO রেখা যথাক্রমে $\angle B$ ও $\angle C$-এর সমদ্বিখণ্ডক]

বা, $\angle BOC + 90° - \frac{1}{2}\angle A = 180°$ [(i) নং হতে]

বা, $\angle BOC = 180° - 90° + \frac{1}{2}\angle A$

$\therefore \angle BOC = \angle 90° + \frac{1}{2}\angle A$ **(প্রমাণিত)**

গ ২(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৬২ ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার AB = AC এবং অতিভুজ BC-এর উপর P যে কোন একটি বিন্দু। *[চিরিরবন্দর উচ্চ বিদ্যালয়, দিনাজপুর]*

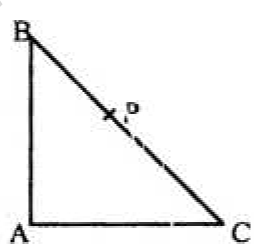
ক. তথ্যানুযায়ী সংক্ষিপ্ত বিবরণসহ চিত্রটি আঁক।

খ. প্রমাণ কর যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$

গ. DEF ত্রিভুজটি ABC-এর সদৃশ্য হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

৬২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle A$ = এক সমকোণ, AB = AC এবং BC এর উপর P একটি বিন্দু।



খ ৬(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবইয়ের অনু-১৪.২ এর উপপাদ্য ৫ দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৬৩ ΔABC এর $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। DA এর সমান্তরাল CE রেখাংশ বর্ধিত BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। *[কোমনা সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, কুমিল্লা]*

ক. তথ্য অনুসারে চিত্রটি অঙ্কন কর। ২

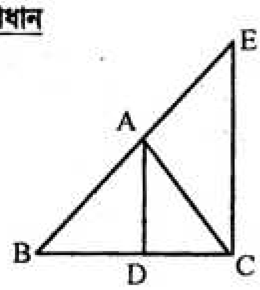
খ. প্রমাণ কর যে, BD : DC = AB : AC। ৪

গ. যদি ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং AD, BC এর ওপর লম্ব হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $4AD^2 = 3AB^2$। ৪

৬৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক

এখানে ΔABC-এর $\angle A$-এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC রেখাকে D বিন্দুতে ছেদ করে। AD-এর সমান্তরাল করে CE রেখা আঁকা হয়েছে।



খ মাধ্যমিক গণিত পাঠ্য বইয়ের অনু-১৪.১ এর উপপাদ্য-৩নং দ্রষ্টব্য।

গ ২(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৬৪ ΔABC সমবাহু ত্রিভুজ। *[বান্দরবান ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ]*

ক. পীথাগোরাসের উপপাদ্যটি চিত্রসহ বর্ণনা কর।

খ. $AD \perp BC$ হয়, তবে দেখাও যে, $4AD^2 = 3AB^2$

গ. $\angle B$ ও $\angle C$ অন্তসমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ কর যে, $\angle BOC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$

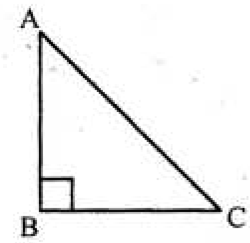
৬৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **পীথাগোরাসের উপপাদ্য:** সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অংকিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অংকিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

চিত্রে ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle B = 90°$

পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

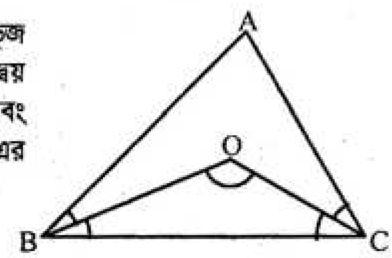
$AC^2 = AB^2 + BC^2$



খ ২(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ **বিশেষ নির্বচন:** দেওয়া আছে, ত্রিভুজ ABC এর $\angle B$ এবং $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। অর্থাৎ, BO এবং CO যথাক্রমে $\angle ABC$ এবং $\angle ACB$ এর সমদ্বিখণ্ডক। প্রমাণ করতে হবে যে,

$\angle BOC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$.



প্রমাণ: **ধাপ** **যথার্থতা**

(১) ΔABC-এ

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ [$\because$ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180°]

বা, $\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 90°$ [উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে পাই]

$\therefore \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 90° - \frac{1}{2}\angle A$ ……… (i)

(২) ΔBOC-এ

$\angle BOC + \angle OBC + \angle OCB = 180°$

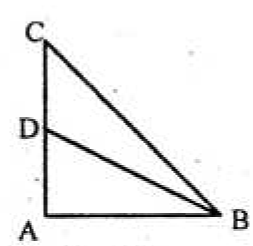
বা, $\angle BOC + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 180°$ [$\because$ BO এবং CO রেখা যথাক্রমে $\angle B$ ও $\angle C$-এর সমদ্বিখণ্ডক]

বা, $\angle BOC + 90° - \frac{1}{2}\angle A = 180°$ [(i) নং হতে]

বা, $\angle BOC = 180° - 90° + \frac{1}{2}\angle A$

$\therefore \angle BOC = \angle 90° + \frac{1}{2}\angle A$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৬৫



চিত্রে ΔABC-এ $\angle A = 90°$ *[রাঙামাটি সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়]*

ক. AB = 8cm, AC = 8cm হলে ΔABC এর ক্ষেত্রফল কত?

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = BC^2$

গ. প্রমাণ কর যে, $BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2$

৬৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক যেহেতু $\angle A = 90°$

$\therefore \Delta ABC$ সমকোণী ত্রিভুজ

সুতরাং ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times AB \times AC$

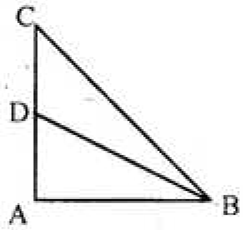
$= \frac{1}{2} \times 8 \times 8$ বর্গ সে.মি.

= 32 বর্গ সে.মি. **(Ans.)**

খ মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবইয়ের অনু-১৫ এর উপপাদ্য-৩ দ্রষ্টব্য।

বি:দ্র: A এর স্থলে C এবং C এর স্থলে A হবে।

গ **বিশেষ নির্বচন:** ΔABC-এর $\angle A$ = এক সমকোণ এবং D, AC এর উপরস্থ একটি বিন্দু। B, D যোগ করি।
প্রমাণ করতে হবে যে,
$BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2$.



প্রমাণ : ধাপ — যথার্থতা

(১) ΔABC সমকোণী যার অতিভুজ BC
$\therefore BC^2 = AB^2 + AC^2$ ...... (i) [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

(২) ΔABD সমকোণী যার অতিভুজ BD
$\therefore BD^2 = AB^2 + AD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]
বা, $AD^2 = BD^2 - AB^2$ ...... (ii)

(৩) (i) নং ও (ii) নং যোগ করে পাই,
$\therefore BC^2 + AD^2 = AB^2 + AC^2 + BD^2 - AB^2$
বা, $BC^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$
$\therefore BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৬৬ ΔABC এর $AB = AC$ এবং $\angle A$ = এক সমকোণ।
[সরকারি জুবিলী উচ্চ বিদ্যালয়, সুনামগঞ্জ]

ক. পিথাগোরাসের উপপাদ্যটি বিবৃত কর।
খ. BC বাহুর উপর P যে কোনো বিন্দু হলে প্রমাণ কর যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$
গ. এমন একটি সামান্তরিক অঙ্কন কর যার একটি কোণ 60° এবং যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফলের সমান।

৬৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **পিথাগোরাসের উপপাদ্য:** সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।
ABC সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে AB অতিভুজ হলে পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী $AB^2 = BC^2 + AC^2$

খ ৬(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

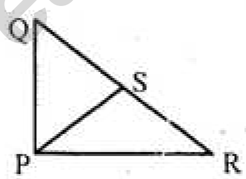
গ ৭(খ)নং সমাধানের অনুরূপ।

প্রশ্ন ▶৬৭ ΔPQR-এ $\angle P$ = এক সমকোণ এবং QR-এর মধ্যবিন্দু S.
[পুলিশ লাইনস হাই স্কুল, ফরিদপুর]

ক. প্রদত্ত তথ্য অনুযায়ী চিত্রটি অঙ্কন কর। ২
খ. প্রমাণ কর যে, $QR^2 = PQ^2 + PR^2$ ৪
গ. দেখাও যে, PS এর দৈর্ঘ্য QR এর অর্ধেক। ৪

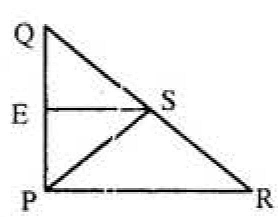
৬৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ΔPQR-এ $\angle P$ = এক সমকোণ। যার লম্ব PQ, ভূমি PR এবং অতিভুজ QR. S, অতিভুজ QR এর মধ্যবিন্দু। P, S যোগ করি।



খ মাধ্যমিক গণিত পাঠ্য বইয়ের অনু-১৫, পৃষ্ঠা২৪৫ উপপাদ্য ৩ দ্রষ্টব্য
বি:দ্র: A এর স্থলে Q, B এর স্থলে R ও C এর স্থলে P হবে।

গ দেওয়া আছে, ΔQPR-এ $\angle P$ = এক সমকোণ এবং S, অতিভুজ QR-এর মধ্যবিন্দু। P, S যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $PS = \frac{1}{2}QR$



অঙ্কন: QP -এর মধ্যবিন্দু E নিই এবং S, E যোগ করি।

প্রমাণ: ধাপ — যথার্থতা

(১) ΔQPR -এর E এবং S যথাক্রমে QP এবং QR -এর মধ্যবিন্দু। [অঙ্কন এবং কল্পনানুসারে]
$\therefore SE \parallel PR$. [$\because$ ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ ৩য় বাহুর সমান্তরাল]
$\therefore \angle QES$ = অনুরূপ $\angle EPR$ = এক সমকোণ [কল্পনা]

(২) এখন, ΔQES এবং ΔPES-এর মধ্যে $QE = PE$, [E, QP-এর মধ্যবিন্দু]
SE সাধারণ বাহু
এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle QES$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle PES$ [$\because$ প্রত্যেকে সমকোণ]
$\therefore \Delta QES \cong \Delta PES$
$\therefore QS = PS$

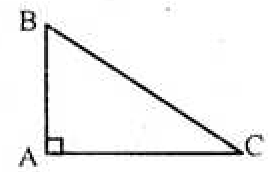
(৩) কিন্তু $QS = \frac{1}{2}QR$
$\therefore PS = \frac{1}{2}QR$. **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৬৮ ABC একটি ত্রিভুজ যার $\angle A = 90^\circ$। D, AC এর উপরস্থ একটি বিন্দু।
[ক্যামব্রিয়ান স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]

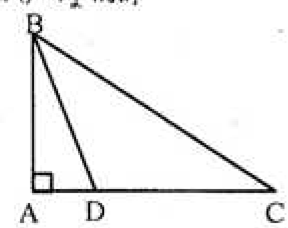
ক. পীথাগোরাসের উপাপাদ্যটি লিখ।
খ. উপরের তথ্যের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2$।
গ. প্রমাণ কর যে, $BC^2 = AB^2 + AC^2$।

৬৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **পীথাগোরাসের উপপাদ্য:** সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।
ABC সমকোণী ত্রিভুজে,
$AB^2 + AC^2 = BC^2$ [পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

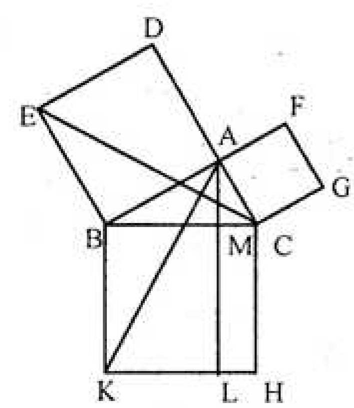


খ ΔABC-এর $\angle A$ = এক সমকোণ এবং D, AC এর উপরস্থ একটি বিন্দু।
B, D যোগ করি।
প্রমাণ করতে হবে যে,
$BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2$.



প্রমাণ: ΔABC সমকোণী যার অতিভুজ BC
$\therefore BC^2 = AB^2 + AC^2$ ...... (i) [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]
আবার, ΔABD সমকোণী যার অতিভুজ BD
$\therefore BD^2 = AB^2 + AD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]
বা, $AD^2 = BD^2 - AB^2$ ...... (ii)
(i) নং ও (ii) নং যোগ করে পাই,
$\therefore BC^2 + AD^2 = AB^2 + AC^2 + BD^2 - AB^2$
বা, $BC^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$
$\therefore BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2$ **(প্রমাণিত)**

গ **বিশেষ নির্বচন:** মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle A = 90^\circ$।
প্রমাণ করতে হবে যে,
$BC^2 = AB^2 + AC^2$



অঙ্কন: AB, AC এবং BC বাহুর উপর যথাক্রমে ABED, ACGF এবং BCHK বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করি। A বিন্দু দিয়ে BK বা CH এর সমান্তরাল AL রেখা আঁকি। মনে করি তা BC কে M বিন্দুতে এবং KH কে L বিন্দুতে ছেদ করে। A ও K এবং C ও E যোগ করি।

প্রমাণ: ধাপ — যথার্থতা

(১) ΔABK ও ΔBCE-এ
$AB = BE$
$BC = BK$
$\angle ABK = \angle CBE$
$\therefore \Delta ABK \cong \Delta BCE$

(২) ত্রিভুজক্ষেত্র ABK ও আয়তক্ষেত্র BKLM একই ভূমি BK এর উপর এবং BK ও AL সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত। সুতরাং আয়তক্ষেত্র BKLM = 2 (ত্রিভুজক্ষেত্র ABK)

(৩) ত্রিভুজক্ষেত্র BCE এবং বর্গক্ষেত্র ABED একই ভূমি BE এবং BE ও CD সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত।
সুতরাং বর্গক্ষেত্র ABED = 2 (ত্রিভুজক্ষেত্র BCE)
= 2(ত্রিভুজক্ষেত্র ABK)

(৪) আয়তক্ষেত্র BKLM = বর্গক্ষেত্র ABED

(৫) অনুরূপভাবে, CMLH = বর্গক্ষেত্র ACGF

(৬) আয়তক্ষেত্র BKLM + আয়তক্ষেত্র CMLH
= বর্গক্ষেত্র ABED + বর্গক্ষেত্র ACGF
বা, বর্গক্ষেত্র BKHC = বর্গক্ষেত্র ABED + বর্গক্ষেত্র ACGF
অর্থাৎ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ **(প্রমাণিত)**